UNIVERSITETI I SHKODRËS “LUIGJ GURAKUQI”

FAKULTETI I SHKENCAVE TË NATYRËS · DEPARTAMENTI I MATEMATIKËS

ANALIZË MATEMATIKE III · LEKSIONI 03

Fletore me 12 ushtrime të zgjidhura me rigorozitet

Seritë e fuqive · rrezja dhe intervali i konvergjencës · kufijtë e zbatimit

Protokolli i zgjidhjes
Zbulo qendrën c dhe koeficientët a_n; përcakto R; karakterizo konvergjencën brenda/jashtë rrezes; analizo secilin skaj në mënyrë të pavarur; verifiko çdo pohim me hipotezat përkatëse.

Pedagoge: Prof. As. Dr. Siditë Duraj

CIKLI I **në Matematikë** · 2026–2027

Statusi: Material për verifikim editorial

Material didaktik i përgatitur për kontroll editorial. Përputhja me temën III të syllabus-it të kursit është kontrolluar; statusi nuk nënkupton recension të jashtëm.

Përmbajtja

Ushtrimi 01 — Një skaj përfshihet, tjetri jo **3**

Ushtrimi 02 — Konvergjencë absolute në dy skajet **3**

Ushtrimi 03 — Rrezja zero **4**

Ushtrimi 04 — Rrezja e pafundme **4**

Ushtrimi 05 — Fuqitë çift dhe ndryshorja e përbërë **5**

Ushtrimi 06 — Interval i zhvendosur me parametër eksponencial **5**

Ushtrimi 07 — Koeficientë linearë **6**

Ushtrimi 08 — Skaji i djathtë, por jo i majti **6**

Ushtrimi 09 — Produkti teleskopik i emëruesit **7**

Ushtrimi 10 — Rrezja e njëjtë, natyra të ndryshme në skaje **7**

Ushtrimi 11 — Gabim i garantuar i një përafrimi **8**

Ushtrimi 12 — Formula Cauchy–Hadamard pa limitin e raportit **8**

Regjistër i kontrolleve matematikore **9**

Ushtrimi 01 — Një skaj përfshihet, tjetri jo

Problemi. Përcaktoni intervalin e konvergjencës së $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n}$.

Strategjia. Kriteri i raportit jep zonën e brendshme; për skajet duhen kriteri i Leibnizit dhe seria harmonike.

Hapi 1 — Identifikimi

Kemi qendër $c = 2$, koeficientët $a_n = 1/n$.

Hapi 2 — Rrezja

Për kufizat absolute $u_n = |x-2|^n/n$ raporti është $u_{n+1}/u_n = |x-2|\, n/(n+1) \to |x-2|$. Prandaj $R = 1$: konvergjencë absolute për $1 < x < 3$, divergjencë për $x < 1$ ose $x > 3$.

Hapi 3 — Skaji i majtë

Në $x = 1$: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n/n$ konvergjon nga Leibniz, sepse $1/n \downarrow 0$. Jo absolutisht: $\sum 1/n$ divergon.

Hapi 4 — Skaji i djathtë

Në $x = 3$: $\sum 1/n$ është harmonike dhe divergon.

Përfundimi. $R = 1$ dhe $\boxed{I = [1, 3)}$; konvergjenca në $x = 1$ është vetëm kushtore.

Kontroll kritik. Kriteri i raportit me limit 1 në secilin skaj nuk jep vendim.

Ushtrimi 02 — Konvergjencë absolute në dy skajet

Problemi. Përcaktoni intervalin për $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n^2}$.

Strategjia. Kriteri i rrënjës për rrezen dhe krahasimi me një seri p në skaje.

Hapi 1 — Qendra dhe rrezja

Kemi $c = -1$, $a_n = n^{-2}$, prandaj $\lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = \lim n^{-2/n} = 1$. Kështu $R = 1$ dhe brenda konvergjon për $-2 < x < 0$.

Hapi 2 — Skajet

Në $x = -2$ kemi $\sum (-1)^n/n^2$; në $x = 0$, $\sum 1/n^2$. Në të dy rastet vlera absolute majorizohet nga $1/n^2$, seri konvergjente.

Përfundimi. $\boxed{I = [-2, 0]}$. Në të dy skajet kemi konvergjencë absolute.

Kontroll kritik. Alternimi i shenjës në skajin e majtë nuk është i nevojshëm për provën, pasi konvergjenca absolute është më e fortë.

Ushtrimi 03 — Rrezja zero

Problemi. Gjeni bashkësinë e konvergjencës së $\sum_{n=0}^{\infty} n!(x-1)^n$.

Strategjia. Raporti për $x \neq 1$ dhe vlerësimi i drejtpërdrejtë në qendër.

Hapi 1 — Jashtë qendrës

Për $u_n = n!|x-1|^n$, kur $x \neq 1$, $u_{n+1}/u_n = (n+1)|x-1| \to +\infty$. Kufizat nuk mund të shkojnë në zero.

Hapi 2 — Në qendër

Në $x = 1$, termi $n = 0$ është 1 dhe të gjithë termat $n \geq 1$ janë zero. Shuma është 1.

Përfundimi. $\boxed{R = 0}$ dhe bashkësia e konvergjencës është $\boxed{\{1\}}$.

Kontroll kritik. Rrezja zero nuk do të thotë se seria divergon edhe në qendrën e saj.

Ushtrimi 04 — Rrezja e pafundme

Problemi. Studioni $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(x-1)^n}{n!}$.

Strategjia. Zbatoni raportin për çdo x të fiksuar.

Hapi 1 — Raporti

Me $u_n = |x-1|^n/n!$, kemi $u_{n+1}/u_n = |x-1|/(n+1) \to 0$ për çdo $x \in \mathbb{R}$.

Hapi 2 — Klasifikimi

Kriteri i raportit garanton konvergjencë absolute për të gjitha vlerat reale të x.

Përfundimi. $\boxed{R = +\infty,\ I = \mathbb{R}}$.

Kontroll kritik. Kufiri i raportit merret për x të fiksuar, jo duke lejuar x të varet nga n.

Ushtrimi 05 — Fuqitë çift dhe ndryshorja e përbërë

Problemi. Gjeni shumën dhe intervalin për $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{4^n}$.

Strategjia. Seria është gjeometrike me raport $q = x^2/4$, jo me raport $x/4$.

Hapi 1 — Reduktimi

Shkruajmë $\sum_{n=0}^{\infty} (x^2/4)^n$.

Hapi 2 — Kushti gjeometrik

$|q| < 1 \iff x^2/4 < 1 \iff -2 < x < 2$.

Hapi 3 — Skajet

Në $x = \pm 2$, kufiza e përgjithshme është 1, ndaj seria divergon.

Përfundimi. $\boxed{I = (-2, 2)}$ dhe $\boxed{S(x) = \dfrac{1}{1 - x^2/4}}$ për $|x| < 2$.

Kontroll kritik. Të shkruash $R = 4$ duke konsideruar vetëm koeficientin 4^{-n} dhe duke harruar fuqinë $2n$ është gabim.

Ushtrimi 06 — Interval i zhvendosur me parametër eksponencial

Problemi. Studioni $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n\, 3^n}$.

Strategjia. Izoloni variablën e re $t = (x-2)/3$ dhe analizoni $t = \pm 1$.

Hapi 1 — Rrezja

$\sum t^n/n$ ka rreze 1 në ndryshoren t. Kushti $|x-2|/3 < 1$ jep $-1 < x < 5$, prandaj $R = 3$ rreth qendrës 2.

Hapi 2 — Skaji $x = -1$

Kemi $t = -1$, pra $\sum (-1)^n/n$, konvergjente nga Leibniz, jo absolutisht.

Hapi 3 — Skaji $x = 5$

Kemi $t = 1$, pra $\sum 1/n$, divergjente.

Përfundimi. $\boxed{I = [-1, 5)}$.

Kontroll kritik. Intervali është i zhvendosur rreth 2; nuk është $[-3, 3)$.

Ushtrimi 07 — Koeficientë linearë

Problemi. Përcaktoni intervalin për $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{x}{3}\right)^n$.

Strategjia. Kriteri i raportit përcakton rrezen; në skaje përdoret kushti i termit zero.

Hapi 1 — Raporti

Për $u_n = n(|x|/3)^n$: $u_{n+1}/u_n = (n+1)n^{-1}|x|/3 \to |x|/3$, kështu $R = 3$.

Hapi 2 — Skajet

Në $x = 3$, kufizat janë n; në $x = -3$, janë $n(-1)^n$. Në asnjërin rast nuk shkojnë në zero.

Përfundimi. $\boxed{I = (-3, 3)}$.

Kontroll kritik. Alternimi në $x = -3$ nuk është i mjaftueshëm: kushti $a_n \to 0$ dështon.

Ushtrimi 08 — Skaji i djathtë, por jo i majti

Problemi. Studioni $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-2)^n}{n 5^n}$.

Strategjia. Rrezja përcaktohet nga $|x-2|/5$; shenja e koeficientit ndryshon natyrën e skajeve.

Hapi 1 — Rrezja

Në vlerë absolute raporti ka limit $|x-2|/5$, prandaj $R = 5$, $-3 < x < 7$.

Hapi 2 — Skaji i majtë

Kur $x = -3$, $(-1)^n(-5)^n/5^n = 1$, pra marrim $\sum 1/n$, që divergon.

Hapi 3 — Skaji i djathtë

Kur $x = 7$, marrim $\sum (-1)^n/n$, që konvergjon me Leibniz.

Përfundimi. $\boxed{I = (-3, 7]}$; në $x = 7$ konvergjenca është kushtore.

Kontroll kritik. Të thuash se të dy skajet japin seri të alternuara është i pavlefshëm: shenjat kombinohen.

Ushtrimi 09 — Produkti teleskopik i emëruesit

Problemi. Studioni $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n(n+1)}$.

Strategjia. Rrezja është 1; në skaje kemi konvergjencë absolute nga krahasimi.

Hapi 1 — Rrezja

Me $a_n = 1/[n(n+1)]$, kemi $\lim |a_n|^{1/n} = 1$ (sepse $\log(n(n+1))/n \to 0$), kështu $R = 1$, $-3 < x < -1$.

Hapi 2 — Skajet

Në $x = -3$ dhe $x = -1$, vlera absolute e kufizës është $1/[n(n+1)] \le 1/n^2$. Pra të dyja seritë konvergjojnë absolutisht.

Hapi 3 — Një kontroll i shumës

Për $x = -1$, $\sum_{n=1}^{N} [1/n - 1/(n+1)] = 1 - 1/(N+1) \to 1$.

Përfundimi. $\boxed{I = [-3, -1]}$ dhe $S(-1) = 1$.

Kontroll kritik. Shuma në një skaj nuk jep automatikisht vlerën e shumës në gjithë intervalin.

Ushtrimi 10 — Rrezja e njëjtë, natyra të ndryshme në skaje

Problemi. Krahasoni $\sum_{n=1}^{\infty} x^n/n$ dhe $\sum_{n=1}^{\infty} x^n/n^2$.

Strategjia. Të dyja kanë rreze 1, por analiza në ± 1 është e ndryshme.

Hapi 1 — Rrezja

Të dy vargjet n^{-1} dhe n^{-2} kënaqin $\lim (n^{-p})^{1/n} = 1$, prandaj $R = 1$.

Hapi 2 — Skajet e serisë së parë

Në $x = -1$ kemi seri të alternuar harmonike, konvergjente; në $x = 1$ harmonike, divergjente.

Hapi 3 — Skajet e serisë së dytë

Në $x = \pm 1$ kemi seri që konvergjojnë absolutisht, sepse $\sum 1/n^2 < \infty$.

Përfundimi. Përkatësisht $\boxed{[-1, 1)}$ dhe $\boxed{[-1, 1]}$.

Kontroll kritik. Rrezja nuk i përcakton skajet dhe nuk nënkupton automatikisht të njëjtën bashkësi konvergjence.

Ushtrimi 11 — Gabim i garantuar i një përafrimi

Problemi. Për $S=\sum_{n=0}^{\infty}(1/2)^n$, gjeni numrin më të vogël N të tillë që $|S-S_N|<10^{-4}$, ku $S_N=\sum_{n=0}^{N}(1/2)^n$.

Strategjia. Përdorni formulën e saktë të mbetjes, jo provën eksperimentale me shumë të pjesshme.

Hapi 1 — Formula

Meqë $S=2$ dhe $S_N=2(1-2^{-(N+1)})=2-2^{-N}$, gabimi është $E_N=2^{-N}$.

Hapi 2 — Kufiri i kërkuar

Kërkojmë $2^{-N}<10^{-4}\iff N>\log_2(10^4)\approx 13.2877$.

Hapi 3 — Minimaliteti

Për $N=13$, $E_{13}=1/8192\approx 1.2207\cdot 10^{-4}>10^{-4}$; për $N=14$, $E_{14}=1/16384\approx 6.1035\cdot 10^{-5}<10^{-4}$.

Përfundimi. $\boxed{N_{\min}=14}$. Kjo do të thotë 15 terma, nga $n=0$ deri te $n=14$.

Kontroll kritik. Numri i termave është $N+1$ kur shuma e pjesshme fillon nga $n=0$.

Ushtrimi 12 — Formula Cauchy–Hadamard pa limitin e raportit

Problemi. Le të jetë $a_n=2^n$ për n çift dhe $a_n=3^n$ për n tek. Studioni $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$.

Strategjia. Përdorni lim sup të rrënjës së n-të dhe kontrolloni kufizat në skajet.

Hapi 1 — Nënvargjet

Për n çift, $|a_n|^{1/n}=2$; për n tek, $|a_n|^{1/n}=3$. Prandaj limiti i zakonshëm nuk ekziston, por $\limsup|a_n|^{1/n}=3$.

Hapi 2 — Rrezja

Formula Cauchy–Hadamard jep $R=1/3$. Konvergjencë absolute për $|x|<1/3$, divergjencë për $|x|>1/3$.

Hapi 3 — Skajet

Në $x=1/3$, për n tek kemi $a_nx^n=1$; në $x=-1/3$, për n tek kemi $a_nx^n=-1$. Prandaj në të dy skajet kushti i domosdoshëm nuk plotësohet.

Përfundimi. $\boxed{I=(-1/3,1/3)}$.

Kontroll kritik. Kriteri i raportit nuk ka limit të përdorshëm: kjo nuk e pengon ekzistencën e rrezes.

Regjistër i kontrolleve matematikore

- Për çdo ushtrim me $R \in (0, \infty)$ është kontrolluar **secilit skaj veçmas**.
- Për kufizat me shenja të alternuara është dalluar **konvergjenca absolute** nga ajo **kushtore**.
- Rasti me faktor $n!$ është klasifikuar me $R = 0$, ndërsa faktori $1/n!$ me $R = \infty$.
- Për gabimin numerik është përdorur formula e **mbetjes së saktë**, jo thjesht një grafik.
- Ky dokument është material ndihmës për studim; kontrolli përfundimtar nga pedagogu mbetet i nevojshëm para botimit institucional.

Material didaktik i përgatitur për kontroll editorial. Përputhja me temën III të syllabus-it të kursit është kontrolluar; statusi nuk nënkupton recension të jashtëm.