UNIVERSITETI I SHKODRËS “LUIGJ GURAKUQI”

FAKULTETI I SHKENCAVE TË NATYRËS · DEPARTAMENTI I MATEMATIKËS

ANALIZË MATEMATIKE III

Ushtrime të zgjidhura me arsyetim të plotë

LEKSIONI 02 · KRITERET E KONVERGJENCËS SË SERIVE NUMERIKE

QASJA AKADEMIKE

16 ushtrime me kriteret e krahasimit, seritë p, D’Alembert, Koshi, kriterin integral, kufirin superior dhe vlerësime të garantuara të mbetjes. Përfshihen parametra realë dhe raste të avancuara.

16 ushtrime të zgjidhura · analiza metodologjike · kontroll i kufijve të zbatimit

Pedagoge: Prof. As. Dr. Siditë Duraj

Programi: Cikli III në Matematikë

Viti akademik: 2026–2027

Statusi: Material plotësues për studim dhe verifikim editorial

Material plotësues ndaj Leksionit 2 (9 faqe). Shembujt e avancuar janë të shënuar në përmbajtje.

Standardi i argumentimit matematikor

Çdo zgjidhje organizohet sipas skemës **hipotezat** → **kriteri i përdorur** → **transformimet e justifikuara** → **përfundimi** → **kontrolli kritik**. Zbatimi i një kriteri pa verifikuar kushtet e tij nuk përbën vërtetim.

1. **Konvergjenca** e serisë $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nënkupton ekzistencën e një kufiri real $S = \lim_{N\to\infty} S_N$, ku $S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$.
2. **Kushti** $a_n \to 0$ është vetëm i domosdoshëm. Për të provuar konvergjencën nevojitet një argument shtesë.
3. **Kriteret e krahasimit** për seri me kufiza jonegative kërkojnë orientimin e saktë të pabarazive dhe njohjen e natyrës së serisë krahasuese.
4. **Raporti dhe rrënja** kanë raste jopërfundimtare kur kufiri përkatës është 1.
5. **Një vlerësim numerik** i shumave të pjesshme nuk zëvendëson një provë konvergjence ose një vlerësim të garantuar të gabimit.

Si të përdoret ky dokument

Lexo formulimin e problemit, përzgjidh vetë metodën, krahaso argumentimin me hapat e dokumentuar dhe kontrollo veçmas vërejtjen kritike. Në platformën web hapat zbulohen progresivisht; në këtë PDF zgjidhjet jepen të plota, të disponueshme për studim, printim dhe citim të brendshëm.

Përmbajtja

Standardi i argumentimit matematikor **2**

Hartë metodologjike e Leksionit 2 **4**

Zgjidhjet e argumentuara **4**

L2.01 — Krahasimi i drejtpërdrejtë me serinë gjeometrike 4
L2.02 — Krahasimi në limit me $1/n^2$ 5
L2.03 — Kriteri i raportit për kufiza me faktorial 6
L2.04 — Kriteri i rrënjës për shprehje të ngritura në fuqinë n 6
L2.05 — Familja logaritmike me parametër 7
L2.06 — Divergjenca e një serie racionale 8
L2.07 — Teorema e serive p nga blloqet dyadike 9
L2.08 — Vlerësimi rigoroz i gabimit të truncimit 10
L2.09 — Seri racionale me parametër real 11
L2.10 — Kriteri i rrënjës me lim sup 12
L2.11 — Seria me faktor logaritmik $\ln n$ 13
L2.12 — Rasti jopërfundimtar i kriterit të raportit 14
L2.13 — Faktoriali që dominon një progresion gjeometrik 14
L2.14 — Logaritmi i një kufize dhe një faktor shtesë $1/n$ 15
L2.15 — Seria me faktoriel dhe fuqi n^n 16
L2.16 — Seria me logaritëm të iteruar 17

Kontroll editorial dhe përdorimi pedagogjik **18**

Hartë metodologjike e Leksionit 2

Kufiza	Metoda tipike	Kontrolli logjik
Polinome	Krahasim direkt/në limit	$0 < L < \infty$ ose drejtimi i pabarazisë
$n!,\ a^n$	Raporti i D'Alembert-it	Rastet $q<1$, $q>1$, $q=1$
$[g(n)]^n$	Rrënja e Koshit	$\rho = 1$ është jopërfundimtar
Fuqitë dhe logaritmet	Kriteri integral	Pozitivitet, vazhdueshmëri, monotoni
Afërsim numerik	Vlerësim i mbetjes	Kontroll i shenjës $<$ kundrejt $\leq$

Zgjidhjet e argumentuara

L2.01 · SERI JONEGATIVE

Krahasimi i drejtpërdrejtë me serinë gjeometrike

FORMULIMI I PROBLEMIT
Përcaktoni natyrën e serisë $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2^n}$.

Strategjia e zgjidhjes. Kërkojmë një majorante të termave që prodhon seri konvergjente.

HAPI 1 Hipotezat

Për çdo $n \geq 1$ kemi $a_n = 1/(n^2+2^n) > 0$.

HAPI 2 Pabarazia krahasuese

Nga $n^2 + 2^n \geq 2^n > 0$ marrim

$$0 < a_n \leq \frac{1}{2^n}.$$

HAPI 3 Natyra e serisë krahasuese

Seria $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}$ është gjeometrike me raport $1/2$ dhe ka shumë 1.

HAPI 4 Zbatimi i teoremës

Nga kriteri i krahasimit të drejtpërdrejtë, për $0 \leq a_n \leq b_n$ dhe $\sum b_n < \infty$ rezulton $\sum a_n < \infty$.

PËRFUNDIMI I ARGUMENTUAR
Seria e dhënë është $\boxed{\text{konvergjente}}$.

Kontrolli kritik. Krahasimi me një seri *divergjente* më të madhe nuk do të ishte provë konvergjence. Drejtimi i krahasimit është pjesë e argumentimit.

L2.02 · POLINOME RACIONALE

Krahasimi në limit me $1/n^2$

FORMULIMI I PROBLEMIT
Shqyrtoni serinë $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{n^3+2}$.

Strategjia e zgjidhjes. Termat kryesorë janë të rendit $3/n^2$; zgjedhim seri model $b_n = 1/n^2$.

HAPI 1 Pozitiviteti

Kemi $a_n > 0$ dhe $b_n > 0$ për çdo $n \geq 1$.

HAPI 2 Raporti i termave

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{3n+1}{n^3+2}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2(3n+1)}{n^3+2}.$$

HAPI 3 Kufiri në raport

Duke pjesëtuar me n^3, marrim

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{3+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n^3}} = 3 \in (0, +\infty).$$

HAPI 4 Përdorimi i kriterit

Meqë $\sum n^{-2}$ konvergjon (seria p, $p = 2 > 1$), nga kriteri i krahasimit në limit rrjedh konvergjenca e serisë së dhënë.

PËRFUNDIMI I ARGUMENTUAR
$\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{n^3+2} \text{ konvergjon}}$.

Kontrolli kritik. Kriteri në këtë formë kërkon kufi $0 < L < +\infty$, jo vetëm ekzistencën e një kufiri.

L2.03 · D'ALEMBERT

Kriteri i raportit për kufiza me faktorial

FORMULIMI I PROBLEMIT
Shqyrtoni $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$.

Strategjia e zgjidhjes. Struktura $n!$ e bën raportin e kufizave të njëpasnjëshme të thjeshtë.

HAPI 1 **Hipotezat**

Për çdo $n \geq 1$, $a_n = 2^n/n! > 0$.

HAPI 2 **Raporti i saktë**

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{2^n} = \frac{2}{n+1}.$$

HAPI 3 **Analiza e kufirit**

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1.$$

HAPI 4 **Zbatimi**

Nga kriteri i D'Alembert-it, një raport eventualisht më i vogël se një $r < 1$ jep majorim gjeometrik të bishtit të serisë.

PËRFUNDIMI I ARGUMENTUAR
Seria është $\boxed{\text{konvergjente}}$.

Kontrolli kritik. Rezultati është konvergjenca, jo domosdoshmërisht vlera e shumës. Formula $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n/n! = e^2$ kërkon njohuri shtesë për serinë eksponenciale dhe nuk nevojitet këtu.

L2.04 · KOSHI

Kriteri i rrënjës për shprehje të ngritura në fuqinë n

FORMULIMI I PROBLEMIT
Përcaktoni natyrën e serisë $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{3n+1}\right)^n$.

Strategjia e zgjidhjes. Rrënja e rendit n anulon fuqinë n.

HAPI 1 **Hipoteza e jonegativitetit**

Për $n \geq 1$ kemi $a_n = (2n/(3n+1))^n > 0$.

HAPI 2 **Rrënja e rendit** n

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{2n}{3n+1}.$$

HAPI 3 **Limiti dhe krahasimi me** 1

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+0}{3+1/n} = \frac{2}{3} < 1.$$

HAPI 4 **Përfundimi sipas teoremës**

Kriteri i rrënjës garanton konvergjencë për $\rho < 1$.

PËRFUNDIMI I ARGUMENTUAR

$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{3n+1}\right)^n \text{ konvergjon}}$.

Kontrolli kritik. Rrënja merret e kufizës a_n në tërësi. Për $\rho = 1$, kriteri nuk vendos.

L2.05 · KRITERI INTEGRAL

Familja logaritmike me parametër

FORMULIMI I PROBLEMIT

Për cilat $p \in \mathbb{R}$ konvergjon seria

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p} \, ?$$

Strategjia e zgjidhjes. Funksioni $f(x) = 1/[x(\ln x)^p]$ mund të krahasohet me integralin e tij të papërshtatshëm.

HAPI 1 **Hipotezat e integralit**

Në intervalin $x \geq 2$ kemi $f(x) > 0$ dhe f të vazhdueshëm. Derivati është

$$f'(x) = -\frac{\ln x + p}{x^2(\ln x)^{p+1}}.$$

Për çdo $p \in \mathbb{R}$ ekziston $x_0 > \max\{2, e^{-p}\}$ i tillë që $f'(x) < 0$ për $x \geq x_0$. Monotonia eventuale mjafton, sepse heqja e një numri të fundmë kufizash nuk ndryshon konvergjencën.

HAPI 2 **Zbatimi i kriterit integral**

Seria ka të njëjtën natyrë me

$$I(p)=\int_{2}^{\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^{p}}.$$

HAPI 3 **Zëvendësimi i justifikuar**

Marrim $t=\ln x$ dhe $dt=dx/x$, prandaj

$$I(p)=\int_{\ln 2}^{\infty}t^{-p}\,dt.$$

HAPI 4 **Diskutimi i parametrit**

Për $p\neq 1$,

$$\int_{\ln 2}^{T}t^{-p}\,dt=\frac{T^{1-p}-(\ln 2)^{1-p}}{1-p}.$$

Ky kufi është i fundmë për $T\to\infty$ pikërisht kur $1-p<0$, pra $p>1$. Për $p=1$ integrali është $\ln T-\ln(\ln 2)\to+\infty$.

PËRFUNDIMI I ARGUMENTUAR

Për çdo $p\in\mathbb{R}$, $\boxed{\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^{p}}\text{ konvergjon }\iff p>1}$.

Kontrolli kritik. Për $p<0$, funksioni mund të mos jetë zbritës që nga $x=2$; monotonia e tij *eventuale* justifikon përdorimin e kriterit.

L2.06 · KRAHASIMI ME HARMONIKEN

Divergjenca e një serie racionale

FORMULIMI I PROBLEMIT

Shqyrtoni $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^{2}+1}{n^{3}+4}$.

Strategjia e zgjidhjes. Krahasojmë termat me $b_n=1/n$, sepse shkalla e numëruesit është vetëm një më e vogël se shkalla e emëruesit.

HAPI 1 **Pozitiviteti**

Për $n\geq 1$ kemi $a_n,b_n>0$.

HAPI 2 **Raporti me serinë model**

$$\frac{a_n}{b_n}=\frac{n(2n^{2}+1)}{n^{3}+4}=\frac{2+n^{-2}}{1+4n^{-3}}.$$

HAPI 3 **Limiti dhe natyra e modelit**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=2\in(0,+\infty),\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\ \text{divergon.}$$

HAPI 4 **Përfundimi**

Nga krahasimi në limit seritë kanë natyrë të njëjtë.

PËRFUNDIMI I ARGUMENTUAR

Seria është $\boxed{\text{divergjente}}$.

Kontrolli kritik. Fakti që $a_n\to 0$ vërtetohet lehtë, por nuk ndryshon natyrën divergjente të serisë.

L2.07 · PROVË E PLOTË E KUFIRIT KRITIK

Teorema e serive p nga blloqet dyadike

FORMULIMI I PROBLEMIT

Për $p\in\mathbb{R}$, përcaktoni natyrën e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ duke argumentuar të gjitha rastet.

Strategjia e zgjidhjes. Përdorim kushtin e domosdoshëm për $p\le 0$, krahasimin me harmoniken për $0<p\le 1$ dhe blloqe dyadike për $p>1$.

HAPI 1 **Rasti** $p\le 0$

Nëse $p=0$, atëherë $n^{-p}=1$. Nëse $p<0$, atëherë $n^{-p}=n^{|p|}\to+\infty$. Pra në të dyja rastet $n^{-p}\not\to 0$, ndaj seria divergon.

HAPI 2 **Rasti** $0<p\le 1$

Për çdo $n\ge 1$,

$$n^{-p}\ge n^{-1}.$$

Meqë seria harmonike divergon, krahasimi nga poshtë jep divergjencën.

HAPI 3 **Ndërtimi i blloqeve kur** $p>1$

Për $k\ge 0$ vendosim

$$B_k=\sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1}\frac{1}{n^p}.$$

Në bllok gjenden saktësisht 2^k kufiza dhe $n^{-p}\le 2^{-kp}$ për çdo indeks në të.

HAPI 4 **Majorimi me seri gjeometrike**

$$0\le B_k\le 2^k\,2^{-kp}=2^{-k(p-1)}.$$

Meqë $p > 1$, raporti $2^{-(p-1)}$ i serisë $\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k(p-1)}$ është më i vogël se 1. Shuma e kufizave të bllokuara mbetet e kufizuar sipër, prandaj seria origjinale konvergjon.

PËRFUNDIMI I ARGUMENTUAR

Kushti i plotë është $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ konvergjon } \iff p > 1}$.

Kontrolli kritik. Pragu $p = 1$ nuk përfshihet. Nuk mjafton të citohet konvergjenca për disa vlera të p; kërkohet një provë që mbulon të gjithë parametrin real.

L2.08 · MBETJA E NJË SERIE KONVERGJENTE

Vlerësimi rigoroz i gabimit të truncimit

FORMULIMI I PROBLEMIT

Le të jetë $S = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}$ dhe $S_N = \sum_{n=1}^{N} n^{-2}$. Gjeni një N që garanton $0 < S - S_N < 10^{-3}$.

Strategjia e zgjidhjes. Vlerësojmë mbetjen $R_N = S - S_N$ nga krahasimi integral me $f(x) = x^{-2}$.

HAPI 1 Verifikimi i hipotezave

Për $x \geq 1$, funksioni $f(x) = x^{-2}$ është pozitiv, i vazhdueshëm dhe *rreptësisht* zbritës, pasi $f'(x) = -2x^{-3} < 0$.

HAPI 2 Vlerësimi i bishtit

Për çdo $N \geq 1$, kriteri integral jep

$$\int_{N+1}^{\infty} \frac{dx}{x^2} \leq R_N \leq \int_{N}^{\infty} \frac{dx}{x^2}.$$

Monotonia e rreptë jep në fakt pabarazi të rrepta në të dy anët.

HAPI 3 Njehsimi i integraleve

Meqë $\int_A^{\infty} x^{-2}dx = 1/A$, marrim

$$\boxed{\frac{1}{N+1} < R_N < \frac{1}{N}}.$$

HAPI 4 Zgjedhja e pragut

Duke marrë $N = 1000$, nga kufiri i sipërm *i rreptë* marrim

$$0 < R_{1000} < \frac{1}{1000} = 10^{-3}.$$

PËRFUNDIMI I ARGUMENTUAR

$\boxed{N = 1000 \text{ garanton } 0 < S - S_N < 10^{-3}}$.

Kontrolli kritik. Nëse përdoret vetëm pabarazia jo e rreptë $R_N \le 1/N$, për $N = 1000$ merret garanci $\le 10^{-3}$. Për funksionin x^{-2} monotonia rreptësisht zbritëse na lejon të vërtetojmë $R_N < 1/N$ dhe të mbajmë $N = 1000$ edhe për kërkesën strikte. Kjo hollësi korrigjon një interpretim të tepërt konservativ të vlerësimit.

L2.09 · KRAHASIM NË LIMIT

Seri racionale me parametër real

FORMULIMI I PROBLEMIT

Për cilat $p \in \mathbb{R}$ konvergjon seria $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{n^3+1}$?

Strategjia e zgjidhjes. Për n të mëdhenj kemi $n^3+1 \sim n^3$; model i përshtatshëm është n^{p-3}.

HAPI 1 Pozitiviteti

Për çdo $p \in \mathbb{R}$ dhe $n \ge 1$, $n^p > 0$ dhe $n^3+1 > 0$.

HAPI 2 Krahasimi në limit

Vendosim $b_n = n^{p-3} > 0$. Atëherë

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n^p}{n^3+1} \cdot n^{3-p} = \frac{n^3}{n^3+1} \longrightarrow 1.$$

HAPI 3 Reduktimi te seria p

Meqë raporti tenton në $1 \in (0, +\infty)$, seritë $\sum a_n$ dhe $\sum n^{-(3-p)}$ kanë natyrë të njëjtë.

HAPI 4 Zgjidhja e kushtit

$$\sum n^{-(3-p)} \text{ konvergjon } \iff 3 - p > 1 \iff p < 2.$$

PËRFUNDIMI I ARGUMENTUAR

Për të gjithë parametrat realë, seria është konvergjente pikërisht kur $\boxed{p < 2}$.

Kontrolli kritik. Në $p = 2$ modeli është harmonik, prandaj seria divergon. Nuk ka arsye të kufizohet p vetëm në numra natyrorë.

L2.10 · KUR LIMITI I ZAKONSHËM NUK EKZISTON

Kriteri i rrënjës me lim sup

FORMULIMI I PROBLEMIT

Për $n \geq 1$ le të jetë

$$a_n = \begin{cases} (1/4)^n, & n \text{ çift}, \\ (1/9)^n, & n \text{ tek}. \end{cases}$$

Shqyrtoni konvergjencën e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Strategjia e zgjidhjes. Përdorim formulimin e përgjithshëm të kriterit të rrënjës me kufirin superior.

HAPI 1 Rrënja e rendit n

$$\sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} \frac{1}{4}, & n \text{ çift}, \\ \frac{1}{9}, & n \text{ tek}. \end{cases}$$

HAPI 2 Mungesa e limitit të zakonshëm

Nënvargu i indekseve çift ka kufi $1/4$, ndërsa ai i indekseve tek ka kufi $1/9$; prandaj lim $\sqrt[n]{a_n}$ nuk ekziston.

HAPI 3 Kufiri superior

$$\rho = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \max\left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{9}\right\} = \frac{1}{4} < 1.$$

HAPI 4 Verifikimi i pavarur

Për çdo $n \geq 1$, $0 < a_n \leq (1/4)^n$. Seria gjeometrike krahasuese konvergjon, ndaj konvergjon edhe seria fillestare.

PËRFUNDIMI I ARGUMENTUAR

Seria $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergjon}}$, si nga lim sup ashtu edhe nga krahasimi.

Kontrolli kritik. Nuk lejohet të shkruhet një limit i zakonshëm aty ku ai nuk ekziston; kalimi në lim sup është ndryshim thelbësor i hipotezës.

L2.11 · KRAHASIMI PËR ÇDO PARAMETËR

Seria me faktor logaritmik $\ln n$

FORMULIMI I PROBLEMIT
Klasifikoni serinë $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^p}$ për $p \in \mathbb{R}$.

Strategjia e zgjidhjes. Ndajmë diskutimin në $p \le 1$ dhe $p > 1$, duke përdorur faktin $\ln n = o(n^{\varepsilon})$ për çdo $\varepsilon > 0$.

HAPI 1 Pozitiviteti

Për $n \ge 2$ kemi $\ln n > 0$ dhe $n^p > 0$.

HAPI 2 Rasti $p \le 1$: divergjencë

Për $n \ge 3$ vlen $\ln n \ge 1$ dhe $n^p \le n$. Prandaj

$$\frac{\ln n}{n^p} \ge \frac{1}{n}.$$

Seria harmonike divergon; nga krahasimi rezulton divergjenca për çdo $p \le 1$.

HAPI 3 Rasti $p > 1$: zgjedhja e eksponentit

Vendosim $\varepsilon = (p-1)/2 > 0$. Duke përdorur

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^{\varepsilon}} = 0,$$

nga një indeks mjaft i madh kemi $\ln n \le n^{\varepsilon}$.

HAPI 4 Majorantja e konvergjencës

$$0 \le \frac{\ln n}{n^p} \le \frac{1}{n^{p-\varepsilon}} = \frac{1}{n^{(p+1)/2}}.$$

Meqë $(p+1)/2 > 1$, seria në të djathtë konvergjon.

PËRFUNDIMI I ARGUMENTUAR
$\boxed{\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^p} \text{ konvergjon } \iff p > 1}$.

Kontrolli kritik. Kufiri $\ln n \to +\infty$ nuk e pengon konvergjencën për $p > 1$: vendimtare është madhësia *relative* e logaritmit kundrejt fuqive pozitive të n.

L2.12 · DY SERI ME NATYRË TË NDRYSHME

Rasti jopërfundimtar i kriterit të raportit

FORMULIMI I PROBLEMIT
Tregoni pse $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = 1$ nuk përcakton natyrën e një serie me $a_n > 0$.

Strategjia e zgjidhjes. Mjafton të ndërtojmë një çift kundërshembujsh me raport kufitar të njëjtë dhe me sjellje të ndryshme.

HAPI 1 Seria divergjente

Marrim $a_n = 1/n$. Atëherë

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} \longrightarrow 1, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ divergon.}$$

HAPI 2 Seria konvergjente

Marrim $b_n = 1/n^2$. Atëherë

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \longrightarrow 1, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ konvergjon.}$$

HAPI 3 Analiza logjike

I njëjti limit i raportit 1 është i pajtueshëm me dy rezultate të kundërta; prandaj kriteri i raportit në këtë rast nuk mund të jetë vendimtar.

PËRFUNDIMI I ARGUMENTUAR
$\boxed{q = 1 \Longrightarrow \text{ kriteri i D'Alembert-it është jopërfundimtar}}$.

Kontrolli kritik. Fjala *jopërfundimtar* nuk nënkupton që seria nuk ka natyrë të përcaktuar; do të thotë që duhet zgjedhur një teoremë tjetër.

L2.13 · DIVERGJENCË PËRMES RAPORTIT

Faktoriali që dominon një progresion gjeometrik

FORMULIMI I PROBLEMIT
Shqyrtoni serinë $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n}$.

Strategjia e zgjidhjes. Shqyrtojmë raportin dhe verifikojmë dështimin e kushtit të domos-

doshëm $a_n \to 0$.

HAPI 1 **Hipotezat**

Për $n \geq 1$ kemi $a_n = n!/3^n > 0$.

HAPI 2 **Raporti**

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{3^{n+1}} \frac{3^n}{n!} = \frac{n+1}{3} \longrightarrow +\infty.$$

HAPI 3 **Dështimi i kushtit të nevojshëm**

Për $n \geq 3$ kemi $a_{n+1}/a_n \geq 4/3 > 1$; kështu vargu (a_n) rritet të paktën gjeometrikisht nga një indeks e tutje dhe nuk tenton në zero.

PËRFUNDIMI I ARGUMENTUAR

Seria është $\boxed{\text{divergjente}}$.

Kontrolli kritik. Rasti $q > 1$ në kriterin e D'Alembert-it nuk duhet ngatërruar me rastin $q = 1$. Raporti që shkon në $+\infty$ siguron drejtpërdrejt divergjencë.

L2.14 · KRAHASIM ELEMENTAR ME INTEGRAL

Logaritmi i një kufize dhe një faktor shtesë $1/n$

FORMULIMI I PROBLEMIT

Shqyrtoni serinë $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+1/n)}{n}$.

Strategjia e zgjidhjes. Përdorim pabarazinë elementare $\ln(1+t) \leq t$ për $t > 0$, të nxjerrë nga integrali.

HAPI 1 **Pabarazia e kontrolluar**

Për $n \geq 1$ kemi

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \int_n^{n+1} \frac{dt}{t}.$$

Nga $1/(n+1) \leq 1/t \leq 1/n$ për $t \in [n, n+1]$ rrjedh

$$\frac{1}{n+1} \leq \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}.$$

HAPI 2 **Krahasimi pas pjesëtimit me n**

$$0 < \frac{\ln(1+1/n)}{n} \leq \frac{1}{n^2}.$$

HAPI 3 **Konvergjenca e majorantes**

Seria $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}$ konvergjon. Sipas kriterit të krahasimit edhe seria e dhënë konvergjon.

PËRFUNDIMI I ARGUMENTUAR

$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+1/n)}{n} \text{ konvergjon}}$.

Kontrolli kritik. Seria $\sum \ln(1+1/n)$ pa faktorin $1/n$ *divergon* (L1.08). Faktori shtesë ndryshon natyrën e serisë; ky është krahasim i dobishëm konceptual.

L2.15 · RAPORT ME KUFI e^{-1}

Seria me faktoriel dhe fuqi n^n

FORMULIMI I PROBLEMIT

Shqyrtoni serinë $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$.

Strategjia e zgjidhjes. Raporti thjeshtohet në një shprehje me kufirin e njohur $(1+1/n)^n \to e$.

HAPI 1 **Pozitiviteti**

Për çdo $n \geq 1$, $a_n = n!/n^n > 0$.

HAPI 2 **Raporti i dy termave**

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}.$$

HAPI 3 **Limiti**

Nga kufiri themelor eksponencial,

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = e^{-1} < 1.$$

PËRFUNDIMI I ARGUMENTUAR

Sipas kriterit të D'Alembert-it seria është $\boxed{\text{konvergjente}}$.

Kontrolli kritik. Nuk kërkohet përdorimi i formulës së Stirling-ut. Raporti i jep menjëherë rezultatin me një argument më të shkurtër dhe plotësisht rigoroz.

L2.16 · KRITERI INTEGRAL NË NIVEL TË AVANCUAR

Seria me logaritëm të iteruar

FORMULIMI I PROBLEMIT
Për cilat $q \in \mathbb{R}$ konvergjon seria

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \, (\ln \ln n)^q} \, ?$$

Strategjia e zgjidhjes. Përdorim kriterin integral dhe zëvendësimin $u = \ln \ln x$.

HAPI 1 Domena dhe pozitiviteti

Për $x \geq 3 > e$, kemi $\ln x > 1$ dhe $\ln \ln x > 0$. Funksioni

$$f(x) = \frac{1}{x \ln x \, (\ln \ln x)^q}$$

është pozitiv dhe i vazhdueshëm për çdo $q \in \mathbb{R}$.

HAPI 2 Monotonia eventuale

Nga derivimi logaritmik,

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{1}{x}\left(1 + \frac{1}{\ln x} + \frac{q}{\ln x \, \ln \ln x}\right).$$

Shprehja në kllapa tenton në 1, ndaj $f'(x) < 0$ për x mjaft të madh. Kriteri integral është i zbatueshëm pas heqjes së një segmenti fillestar të fundmë.

HAPI 3 Zëvendësimi në integral

$$I(q) = \int_3^{\infty} \frac{dx}{x \ln x \, (\ln \ln x)^q},$$

$$u = \ln \ln x, \qquad du = \frac{dx}{x \ln x},$$

$$I(q) = \int_{\ln \ln 3}^{\infty} u^{-q} \, du.$$

HAPI 4 Kriteri i konvergjencës

Kemi $\ln \ln 3 > 0$. Integrali $\int_c^{\infty} u^{-q} du$, me $c > 0$, është i fundmë pikërisht kur $q > 1$.

PËRFUNDIMI I ARGUMENTUAR

$$\boxed{\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \, (\ln \ln n)^q} \text{ konvergjon } \iff q > 1}.$$

Kontrolli kritik. Niveli shtesë i logaritmit ndryshon shkallën e testimit, por kufiri kritik

mbetet 1. Poshtë $x = e$ shprehja $\ln\ln x$ mund të krijojë probleme domaini; zgjedhja e indeksit fillestar $n = 3$ është e qëllimshme.

Kontroll editorial dhe përdorimi pedagogjik

Materiali është krijuar si shoqërues i dy leksioneve të plota të lëndës *Analizë Matematike III*. Argumentet janë dhënë me hapat e nevojshëm për kontroll dhe me trajtim të rasteve kufitare. Për përdorim institucional rekomandohet recensim përfundimtar i notacionit dhe përputhjes me syllabusin.

> **Parimi i vlerësimit:** Në çdo zgjidhje studenti duhet të identifikojë saktësisht hipotezat, të emërtojë teoremën e përdorur, të justifikojë kalimin mes formulave dhe të japë një përfundim që i përgjigjet problemit. Vetëm një rezultat i saktë numerik, pa arsyetim, nuk plotëson standardin e dëshiruar.

Referenca të brendshme të kursit. Leksioni 1: *Seritë numerike, konceptet bazë* (14 faqe); Leksioni 2: *Kriteret e konvergjencës së serive numerike* (9 faqe). Viti akademik 2026–2027, Departamenti i Matematikës, Universiteti i Shkodrës “Luigj Gurakuqi”.