UNIVERSITETI I SHKODRËS “LUIGJ GURAKUQI”

FAKULTETI I SHKENCAVE TË NATYRËS · DEPARTAMENTI I MATEMATIKËS

ANALIZË MATEMATIKE III

Ushtrime të zgjidhura me arsyetim të plotë

LEKSIONI 01 · SERITË NUMERIKE: KONCEPTET BAZË

QASJA AKADEMIKE

10 ushtrime të organizuara nga seria gjeometrike dhe teleskopimi deri te kundër-shembujt dhe kriteri i Koshit. Çdo zgjidhje ruan strukturën logjike të provës dhe nx-jerr në pah gabimet metodologjike të mundshme.

10 ushtrime të zgjidhura · analiza metodologjike · kontroll i kufijve të zbatimit

Pedagoge: Prof. As. Dr. Siditë Duraj

Programi: Cikli III në Matematikë

Viti akademik: 2026–2027

Statusi: Material plotësues për studim dhe verifikim editorial

Standardi i argumentimit matematikor

Çdo zgjidhje organizohet sipas skemës **hipotezat** → **kriteri i përdorur** → **transformimet e justifikuara** → **përfundimi** → **kontrolli kritik**. Zbatimi i një kriteri pa verifikuar kushtet e tij nuk përbën vërtetim.

1. **Konvergjenca** e serisë $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nënkupton ekzistencën e një kufiri real $S = \lim_{N\to\infty} S_N$, ku $S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$.
2. **Kushti** $a_n \to 0$ është vetëm i domosdoshëm. Për të provuar konvergjencën nevojitet një argument shtesë.
3. **Kriteret e krahasimit** për seri me kufiza jonegative kërkojnë orientimin e saktë të pabarazive dhe njohjen e natyrës së serisë krahasuese.
4. **Raporti dhe rrënja** kanë raste jopërfundimtare kur kufiri përkatës është 1.
5. **Një vlerësim numerik** i shumave të pjesshme nuk zëvendëson një provë konvergjence ose një vlerësim të garantuar të gabimit.

Si të përdoret ky dokument

Lexo formulimin e problemit, përzgjidh vetë metodën, krahaso argumentimin me hapat e dokumentuar dhe kontrollo veçmas vërejtjen kritike. Në platformën web hapat zbulohen progresivisht; në këtë PDF zgjidhjet jepen të plota, të disponueshme për studim, printim dhe citim të brendshëm.

Përmbajtja

Standardi i argumentimit matematikor **2**

Hartë metodologjike e Leksionit 1 **4**

Zgjidhjet e argumentuara **4**

L1.01 — Shuma e dy serive gjeometrike 4
L1.02 — Numri dhjetor periodik si shumë e pafundme 5
L1.03 — Seri teleskopike me diferencë katrorësh 6
L1.04 — Seria me tre faktorë radhazi 7
L1.05 — Termi shkon në zero, por seria divergon 7
L1.06 — Divergjencë me kriterin e Koshit 8
L1.07 — Seria harmonike dhe mohimi i kriterit të Koshit 9
L1.08 — Një seri logaritmike teleskopike 10
L1.09 — Seria gjeometrike me parametër real 11
L1.10 — Kombinimi i një serie teleskopike dhe gjeometrike 12

Kontroll editorial dhe përdorimi pedagogjik **12**

Hartë metodologjike e Leksionit 1

Struktura	Teknikë vendimtare	Kujdesi kryesor
Fuqi r^n	Seria gjeometrike	Indeksi fillestar dhe $\lvert r\rvert < 1$
Thyesa racionale	Zbërthimi teleskopik	Njehsimi i S_N para limitit
Diferenca radhazi	Anulimi teleskopik	$a_n \to 0$ nuk mjafton
Divergjenca	Mohimi i kriterit të Koshit	Blloqe arbitrarisht të largëta
Parametër real	Analiza e rasteve kufitare	Trajtimi veçmas i $\lvert r\rvert = 1$

Zgjidhjet e argumentuara

L1.01 · SERIA GJEOMETRIKE

Shuma e dy serive gjeometrike

FORMULIMI I PROBLEMIT
Llogaritni shumën e serisë

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{6^n}.$$

Strategjia e zgjidhjes. Zbërthejmë kufizën e përgjithshme në dy kufiza gjeometrike dhe kontrollojmë veçmas kushtet e konvergjencës.

HAPI 1 Zbërthimi algjebrik

Për çdo $n \geq 1$ kemi barazinë e saktë

$$\frac{2^n + 3^n}{6^n} = \frac{2^n}{6^n} + \frac{3^n}{6^n} = \left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

HAPI 2 Konvergjenca e pjesëve

Raportet $r_1 = 1/3$ dhe $r_2 = 1/2$ përmbushin $\lvert r_1\rvert < 1$ dhe $\lvert r_2\rvert < 1$. Prandaj të dyja seritë gjeometrike konvergjojnë. Vetëm pas këtij konstatimi kalojmë nga lineariteti i shumave të pjesshme te shuma e serive.

HAPI 3 Përdorimi i formulës së duhur

Për $\lvert r\rvert < 1$ dhe indeks fillestar $n = 1$ vlen

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n = \frac{r}{1 - r}.$$

Rrjedhimisht,

$$S = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} + \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} + \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} + 1.$$

PËRFUNDIMI I ARGUMENTUAR

Seria është konvergjente dhe $\boxed{S = \frac{3}{2}}$.

Kontrolli kritik. Formula $1/(1-r)$ i përket serisë që fillon nga $n = 0$; përdorimi i saj këtu pa korrigjuar indeksin do të jepte rezultat të gabuar.

L1.02 · SERIA GJEOMETRIKE

Numri dhjetor periodik si shumë e pafundme

FORMULIMI I PROBLEMIT

Ktheni numrin $0,272727\ldots$ në një thyesë të zakonshme duke përdorur seritë.

Strategjia e zgjidhjes. Secili bllok me dy shifra formon një term të një serie gjeometrike me raport 10^{-2}.

HAPI 1 Shkrimi si seri

$$0,(27) = \frac{27}{10^2} + \frac{27}{10^4} + \frac{27}{10^6} + \cdots = \frac{27}{100}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{100}\right)^k.$$

HAPI 2 Justifikimi i konvergjencës

Raporti është $r = 1/100$, prandaj $|r| < 1$ dhe seria ka shumë të fundme.

HAPI 3 Njehsimi dhe thjeshtimi

$$0,(27) = \frac{27}{100}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{100}} = \frac{27}{100}\cdot\frac{100}{99} = \frac{27}{99} = \frac{3}{11}.$$

PËRFUNDIMI I ARGUMENTUAR

Barazia e kërkuar është $\boxed{0,(27) = \frac{3}{11}}$.

Kontrolli kritik. Perioda ka gjatësi 2; raporti është $1/100$, jo $1/10$. Shkrimi decimal $0,2727\ldots$ nuk duhet ngatërruar me numrin $0,27$.

L1.03 · SHUMAT E PJESSHME

Seri teleskopike me diferencë katrorësh

FORMULIMI I PROBLEMIT
Njehsoni $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$.

Strategjia e zgjidhjes. Faktorizimi i emëruesit sugjeron zbërthimin në thyesa të thjeshta.

HAPI 1 Identiteti i nevojshëm

$$4n^2-1=(2n-1)(2n+1), \qquad \frac{1}{4n^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right).$$

Identiteti verifikohet duke sjellë në emërues të përbashkët: diferenca e numëruesve është 2.

HAPI 2 Shkrimi i shumës së pjesshme

Për $N \geq 1$,

$$\begin{aligned} S_N &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2N-1}-\frac{1}{2N+1}\right). \end{aligned}$$

HAPI 3 Anulimi dhe kufiri

Të gjitha kufizat e brendshme anulohen, ndaj

$$S_N=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2N+1}\right), \qquad \lim_{N\to\infty} S_N=\frac{1}{2}.$$

PËRFUNDIMI I ARGUMENTUAR
Seria konvergjon dhe $\boxed{S=\frac{1}{2}}$.

Kontrolli kritik. Në një seri teleskopike anulimet bëhen në shumën *e fundme* S_N, jo drejt-përdrejt në një shprehje me pafundësi.

L1.04 · TELESKOPIM I DYFISHTË

Seria me tre faktorë radhazi

FORMULIMI I PROBLEMIT
Gjeni shumën $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

Strategjia e zgjidhjes. Ndërtojmë një diferencë të formës $b_n - b_{n+1}$.

HAPI 1 **Zbërthimi algjebrik**

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right).$$

Kjo rrjedh pasi numëruesi i diferencës është $(n+2) - n = 2$.

HAPI 2 **Përcaktimi i kufizave teleskopike**

Le të jetë $b_n = 1/[2n(n+1)]$. Atëherë $a_n = b_n - b_{n+1}$ dhe

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} (b_n - b_{n+1}) = b_1 - b_{N+1}.$$

HAPI 3 **Kufizat skajore dhe limiti**

$$S_N = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(N+1)(N+2)} \longrightarrow \frac{1}{4}.$$

PËRFUNDIMI I ARGUMENTUAR
Seria ka shumën $\boxed{S = \frac{1}{4}}$.

Kontrolli kritik. Faktori $1/2$ në zbërthim është thelbësor; mungesa e tij dyfishon gabimisht shumën.

L1.05 · KUSHT I NEVOJSHËM, JO I MJAFTUESHËM

Termi shkon në zero, por seria divergon

FORMULIMI I PROBLEMIT
Shqyrtoni natyrën e serisë $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$.

Strategjia e zgjidhjes. Racionalizimi tregon sjelljen e termit; teleskopimi vendos natyrën

e serisë.

HAPI 1 **Sjellja e kufizës së përgjithshme**

Për çdo $n \geq 1$,

$$a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} > 0, \quad a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

HAPI 2 **Shkrimi i shumës së pjesshme**

$$\begin{aligned} S_N &= (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \cdots + (\sqrt{N+1} - \sqrt{N}) \\ &= \sqrt{N+1} - 1. \end{aligned}$$

HAPI 3 **Analiza e kufirit të shumave**

$$\lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} (\sqrt{N+1} - 1) = +\infty.$$

PËRFUNDIMI I ARGUMENTUAR

Seria është divergjente, edhe pse $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Kontrolli kritik. Konvergjenca e kufizave $a_n \to 0$ nuk provon konvergjencën e serisë; duhet kontrolluar lim S_N.

L1.06 · BLLOQE TË SHUMAVE TË PJESSHME

Divergjencë me kriterin e Koshit

FORMULIMI I PROBLEMIT

Provoni me kriterin e Koshit se $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ divergon.

Strategjia e zgjidhjes. Për të hedhur poshtë kushtin e Koshit mjafton të ndërtojmë dy indekse arbitrarisht të mëdha ku diferenca e shumave mbetet mbi një prag fiks.

HAPI 1 **Zgjedhja e indekseve**

Për çdo $N \in \mathbb{N}$,

$$S_{2N} - S_N = \sum_{k=N+1}^{2N} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

HAPI 2 **Vlerësimi i secilës kufizë**

Për $N+1 \leq k \leq 2N$, monotoninë e funksionit $x \mapsto x^{-1/2}$ e shfrytëzojmë në formën

$$\frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{\sqrt{2N}}.$$

HAPI 3 **Vlerësimi i diferencës**

Meqë blloku përmban N kufiza,

$$S_{2N} - S_N \geq \frac{N}{\sqrt{2N}} = \sqrt{\frac{N}{2}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

HAPI 4 **Mohimi formal i kushtit**

Zgjedhim $\varepsilon = 1/2$. Për çdo N_0 mund të marrim $N \geq N_0$ dhe $m = N$, $n = 2N$, kështu

$$|S_n - S_m| \geq 1/\sqrt{2} > \varepsilon.$$

Prandaj (S_N) nuk është varg i Koshit.

PËRFUNDIMI I ARGUMENTUAR

Sipas plotësisë së $\mathbb{R}$, $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2} \text{ divergon}}$.

Kontrolli kritik. Kriteri i Koshit kërkon kontrollin e çdo bishti $\sum_{k=m+1}^{n} a_k$. Për ta rrëzuar mjafton një familje bishtash që shkel kushtin.

L1.07 · KUNDËRSHEMBULL THEMELOR

Seria harmonike dhe mohimi i kriterit të Koshit

FORMULIMI I PROBLEMIT

Provoni se $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ nuk ka shumë të fundme.

Strategjia e zgjidhjes. Zgjedhim blloqe me gjatësi N për të nxjerrë një kufi pozitiv uniform.

HAPI 1 **Diferenca e shumave të pjesshme**

$$S_{2N} - S_N = \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} + \cdots + \frac{1}{2N}.$$

HAPI 2 **Majorim nga poshtë**

Secili emërues është jo më i madh se $2N$, prandaj

$$S_{2N} - S_N \geq \underbrace{\frac{1}{2N} + \cdots + \frac{1}{2N}}_{N \text{ kufiza}} = \frac{1}{2}.$$

HAPI 3 Kontradikta me kushtin e Koshit

Për $\varepsilon = 1/4$ dhe për çdo N_0 ka $N \geq N_0$ të tillë që $|S_{2N} - S_N| \geq 1/2 > \varepsilon$. Kështu (S_N) nuk konvergjon në $\mathbb{R}$.

PËRFUNDIMI I ARGUMENTUAR

Seria harmonike $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ divergon}}$.

Kontrolli kritik. Vargu $1/n$ shkon në zero. Përfundimi i divergjencës vjen nga struktura e shumave të pjesshme, jo nga limiti i kufizës.

L1.08 · PËRDORIM I VETIVE TË LOGARITMIT

Një seri logaritmike teleskopike

FORMULIMI I PROBLEMIT

Shqyrtoni $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

Strategjia e zgjidhjes. Shkruajmë logaritmin e herësit si diferencë logaritmesh.

HAPI 1 Identiteti i kufizës

Për $n \geq 1$,

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln \frac{n+1}{n} = \ln(n+1) - \ln n.$$

HAPI 2 Anulimi për N kufiza

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} [\ln(n+1) - \ln n] = \ln(N+1) - \ln 1 = \ln(N+1).$$

HAPI 3 Kufiri i shumës së pjesshme

Si $\ln(N+1) \to +\infty$, vargu (S_N) nuk ka limit të fundmë. Megjithatë, nga vazhdueshmëria e logaritmit del $a_n \to \ln 1 = 0$.

PËRFUNDIMI I ARGUMENTUAR

Seria $\boxed{\text{divergon drejt } +\infty}$.

Kontrolli kritik. Shprehja $\ln(1 + 1/n) \to 0$ nuk është provë konvergjence. Gjithashtu, nuk mund të zëvendësojmë $\sum \ln$ me $\ln \sum$; lejohet vetëm identiteti i logaritmit të një prodhimi të fundmë.

L1.09 · DISKUTIM I PLOTË I RASTEVE KUFITARE

Seria gjeometrike me parametër real

FORMULIMI I PROBLEMIT

Përcaktoni për cilat $x \in \mathbb{R}$ konvergjon seria $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(2x-1)^n$ dhe njehsoni shumën.

Strategjia e zgjidhjes. Parametri x futet në raportin e një serie gjeometrike; kërkohet zgjidhja e kushtit $|r|<1$.

HAPI 1 Identifikimi i raportit

Vendosim $r = 2x-1$. Atëherë seria është $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$.

HAPI 2 Zona e konvergjencës

$$|2x-1|<1 \iff -1<2x-1<1 \iff 0<x<1.$$

HAPI 3 Njehsimi i shumës

Për $0<x<1$,

$$S(x)=\frac{r}{1-r}=\frac{2x-1}{1-(2x-1)}=\frac{2x-1}{2(1-x)}.$$

HAPI 4 Kontrolli i skajeve dhe i jashtëzonës

Për $x=0$, raporti është -1 dhe kufizat oshilojnë midis -1 e 1. Për $x=1$, raporti është 1 dhe çdo kufizë është 1. Nëse $x<0$ ose $x>1$, kemi $|r|>1$, prandaj $r^n \not\to 0$. Në të gjitha këto raste seria divergon.

PËRFUNDIMI I ARGUMENTUAR

Seria konvergjon *atëherë dhe vetëm atëherë* kur $\boxed{0<x<1}$; në këtë interval $\boxed{S(x)=\dfrac{2x-1}{2(1-x)}}$.

Kontrolli kritik. Pikat kufitare $x=0,1$ nuk mund të përfshihen, edhe pse kufiri $|r|=1$ mund të duket i pranueshëm në një argument numerik.

L1.10 · LINEARITETI I SERIVE

Kombinimi i një serie teleskopike dhe gjeometrike

FORMULIMI I PROBLEMIT
Njehsoni shumën e serisë

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{3^n}\right).$$

Strategjia e zgjidhjes. Për secilën pjesë ndërtojmë një shumë të pjesshme të saktë dhe më pas kalojmë në limit.

HAPI 1 Pjesa teleskopike

Nga identiteti $1/[n(n+1)] = 1/n - 1/(n+1)$ rezulton

$$A_N = \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{N+1} \longrightarrow 1.$$

HAPI 2 Pjesa gjeometrike

$$B_N = \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{\frac{1}{3}(1-3^{-N})}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}(1-3^{-N}) \longrightarrow \frac{1}{2}.$$

HAPI 3 Shuma e përgjithshme

Nga $S_N = A_N + B_N$ dhe linearitet i limitit për dy vargje konvergjente kemi

$$S = \lim_{N\to\infty}(A_N + B_N) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

PËRFUNDIMI I ARGUMENTUAR
Seria konvergjon dhe ka shumë $\boxed{S = \frac{3}{2}}$.

Kontrolli kritik. Linearitet i shumave të serive përdoret pa rezerva vetëm pasi është justifikuar konvergjenca e pjesëve që mblidhen.

Kontroll editorial dhe përdorimi pedagogjik

Materiali është krijuar si shoqërues i dy leksioneve të plota të lëndës *Analizë Matematike III*. Argumentet janë dhënë me hapat e nevojshëm për kontroll dhe me trajtim të rasteve kufitare. Për përdorim institucional rekomandohet recensim përfundimtar i notacionit dhe përputhjes me syllabusin.

Parimi i vlerësimit: Në çdo zgjidhje studenti duhet të identifikojë saktësisht hipotezat, të emërtojë teoremën e përdorur, të justifikojë kalimin mes formulave dhe të japë një përfundim që i përgjigjet problemit. Vetëm një rezultat i saktë numerik, pa arsyetim, nuk plotëson standardin e dëshiruar.

Referenca të brendshme të kursit. Leksioni 1: *Seritë numerike, konceptet bazë* (14 faqe); Leksioni 2: *Kriteret e konvergjencës së serive numerike* (9 faqe). Viti akademik 2026–2027, Departamenti i Matematikës, Universiteti i Shkodrës “Luigj Gurakuqi”.