UNIVERSITETI I SHKODRËS “LUIGJ GURAKUQI”

FAKULTETI I SHKENCAVE TË NATYRËS · DEPARTAMENTI I MATEMATIKËS

ANALIZË MATEMATIKE III / LEKSIONI 03

Seritë e fuqive dhe intervali i konvergjencës

Teorema e rrezes · Formula Cauchy–Hadamard · Konvergjencë lokale uniforme · Skajet e intervalit

Koncepti qendror

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n, \qquad \frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Nga përkufizimi dhe prova, te klasifikimi i intervalit të konvergjencës dhe analiza e skajeve.

Pedagoge: Prof. As. Dr. Siditë Duraj

Programi: CIKLI II në Matematikë

Viti akademik: 2026–2027

Lloji: Tekst integral i leksionit, me vërtetime dhe shembuj

Material didaktik i përgatitur për kontroll editorial. Përputhja me temën III të syllabus-it të kursit është kontrolluar; statusi nuk nënkupton recension të jashtëm.

Përmbajtja

1 Rezultatet e të nxënit dhe lidhja me leksionet pararendëse 3

2 Nga polinomi te seria e fuqive 3

3 Rrezja e konvergjencës dhe formula Cauchy–Hadamard 3

3.1 Një version praktik me raportin 4

4 Bashkësia dhe intervali i konvergjencës 5

5 Konvergjenca uniforme dhe vazhdimësia 5

6 Derivimi dhe integrimi term pas termi 6

6.1 Një identitet i kontrollueshëm 7

7 Shembuj të zgjidhur me analizë të skajeve 7

7.1 Shembulli 1 — Interval gjysmë i mbyllur 7

7.2 Shembulli 2 — Të dy skajet përfshihen 7

7.3 Shembulli 3 — Rrezja zero 7

7.4 Shembulli 4 — Rrezja e pafundme 7

7.5 Shembulli 5 — Fuqitë çift 7

7.6 Shembulli 6 — Limit i rrënjës pa ekzistencë të limitit të zakonshëm 8

8 Shembull parametrik me klasifikim të plotë 8

9 Pse kufijtë numerikë nuk janë prova 8

10 Vlerësimi i mbetjes në rastin gjeometrik 9

11 Gabime metodologjike, kontrolli dhe detyra 9

12 Literatura dhe kufijtë e kapitullit 10

1 Rezultatet e të nxënit dhe lidhja me leksionet pararendëse

Pas këtij leksioni, studenti duhet të jetë në gjendje të (i) përkufizojë serinë e fuqive dhe bashkësinë e konvergjencës së saj; (ii) përcaktojë rrezen R përmes formulës Cauchy–Hadamard dhe kritereve të raportit/rrënjës kur ato zbatohen; (iii) provojë konvergjencën absolute brenda rrezes, divergjencën jashtë saj dhe të shqyrtojë veçmas skajet; (iv) arsyetojë konvergjencën uniforme në çdo segment kompakt brenda intervalit të hapur; (v) shpjegojë vlefshmërinë e veprimeve term-pas-termi brenda rrezes; (vi) interpretojë kufirin e gabimit për përafrime të veçanta.

Parakushte

Kuptimi i serisë numerike dhe i shumave të pjesshme; kushti i domosdoshëm $a_n \to 0$; krahasimi, kriteri i raportit dhe rrënjës; seria gjeometrike; kriteri i Leibnizit (me kushtet e tij të plota), konvergjenca absolute/kushtore dhe seritë p si mjete për diskutimin e skajeve. Këto tri njohuri të fundit rikujtohen shkurt përpara aplikimeve. Një argument numerik ose grafik nuk zëvendëson provën.

2 Nga polinomi te seria e fuqive

Për një qendër të fiksuar $c \in \mathbb{R}$ dhe koeficientë realë $(a_n)_{n\ge 0}$, *seri e fuqive me qendër* c quhet shprehja

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \cdots. \tag{1}$$

Për çdo $N \in \mathbb{N}$, polinomi $P_N(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n (x-c)^n$ është *shuma e pjesshme*. Seria (1) konvergjon në x kur $\lim_{N\to\infty} P_N(x)$ ekziston dhe është i fundmë. Në qendër $x = c$ shuma është gjithmonë a_0; për $n = 0$ marrim, sipas konventës së polinomeve, $(x-c)^0 = 1$, edhe kur $x = c$. Bashkësia e konvergjencës shënohet $E = \{x \in \mathbb{R} : (P_N(x))_N \text{ konvergjon}\}$.

Shembulli bazë është seria gjeometrike:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \qquad |x| < 1.$$

Kushti $|x| < 1$ është pjesë e identitetit, jo një shënim dekorativ: në $x = 1$ dhe $x = -1$ seria nuk konvergjon.

3 Rrezja e konvergjencës dhe formula Cauchy–Hadamard

Për të studiuar serinë (1) vendosim

$$L = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} \in [0, +\infty], \qquad R = \frac{1}{L}.$$

Marrim me marrëveshje $1/0 = +\infty$ dhe $1/(+\infty) = 0$. Koeficienti a_0 nuk luan rol në këtë limit.

Teorema 3.1 — Cauchy–Hadamard

Për serinë e fuqive $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ ekziston $R \in [0, +\infty]$ i tillë që:

1. nëse $|x-c| < R$, seria konvergjon absolutisht;
2. nëse $|x-c| > R$, seria divergon (termi i përgjithshëm nuk shkon në zero);
3. nëse $0 < R < +\infty$, në $x = c - R$ dhe $x = c + R$ kërkohet analizë e pavarur.

Vlera e R jepet nga $R^{-1} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}$.

Vërtetim. Në $x = c$ seria konvergjon me shumë a_0. Le të jetë $t = |x-c| > 0$. Nëse $0 < L < \infty$ dhe $t < 1/L$, zgjedhim q të tillë që $L < q < 1/t$. Vetia e kufirit superior jep $|a_n|^{1/n} \le q$ për çdo n mjaft të madh. Atëherë

$$|a_n (x-c)^n| \le (qt)^n, \qquad 0 < qt < 1,$$

prandaj seria konvergjon absolutisht nga kriteri i krahasimit. Nëse $L = 0$, për çdo $t > 0$ zgjedhim $q \in (0, 1/t)$; i njëjti argument provon konvergjencë absolute për çdo x. Nëse $0 < L < \infty$ dhe $t > 1/L$, zgjedhim q me $1/t < q < L$. Nga përkufizimi i lim sup, për pafund shumë indekse n kemi $|a_n|^{1/n} > q$, prandaj

$$|a_n (x-c)^n| > (qt)^n > 1.$$

Kushti i domosdoshëm i konvergjencës dështon. Nëse $L = +\infty$, për çdo $t > 0$ zgjedhim $q > 1/t$ dhe argumenti i njëjtë jep divergjencë për $x \neq c$. Në rastin $0 < L < \infty$ dhe $t = R$, asnjëri nga dy argumentet nuk jep përfundim; skajet kontrollohen veçmas. ∎

Pse lim sup dhe jo gjithmonë një limit?

Rrezja ekziston edhe kur $\lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}$ nuk ekziston. Për shembull, nëse $a_n = 2^n$ për n çift dhe $a_n = 3^n$ për n tek, atëherë lim sup $\sqrt[n]{|a_n|} = 3$ dhe $R = 1/3$.

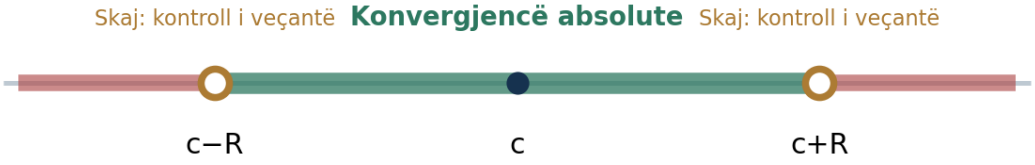


Figura 1: Struktura e përgjithshme e konvergjencës për $0 < R < \infty$: brenda rrezes konvergjencë absolute; jashtë rrezes divergjencë; secili skaj kërkon analizë të pavarur.

3.1 Një version praktik me raportin

Nëse $a_n \neq 0$ për çdo n mjaft të madh dhe ekziston

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \in [0, +\infty],$$

atëherë $R = 1/\ell$, me të njëjtat marrëveshje për 0 dhe $+\infty$. Kjo vjen nga kriteri i raportit për serinë numerike $\sum |a_n (x-c)^n|$: raporti i kufizave është $|a_{n+1}/a_n| \cdot |x-c|$. Kur limiti i raportit nuk ekziston, formula Cauchy–Hadamard mbetet metoda e përgjithshme.

4 Bashkësia dhe intervali i konvergjencës

Nëse $0 < R < \infty$, çdo pikë e intervalit të hapur $(c-R, c+R)$ jep konvergjencë absolute, ndërsa jashtë $[c-R, c+R]$ ka divergjencë. Secili skaj mund të përfshihet ose jo. Prandaj katër format e mundshme janë

$$(c-R, c+R), \quad [c-R, c+R), \quad (c-R, c+R], \quad [c-R, c+R].$$

Rikujtim: konvergjenca në skaje

Seria $\sum (-1)^n b_n$ konvergjon sipas Leibnizit kur $b_n \geq 0$, $b_{n+1} \leq b_n$ eventualisht dhe $b_n \to 0$. Konvergjenca është *absolute* kur $\sum |u_n|$ konvergjon dhe *kushtore* kur $\sum u_n$ konvergjon, por $\sum |u_n|$ divergon. Për $p > 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p$ konvergjon saktësisht kur $p > 1$.

Në skaje seria e fuqive kthehet në seri numerike. Për të provuar një skaj përdorim serinë p, kriterin e Leibnizit, krahasimin, kushtin e termit zero ose kritere të tjera të zbatueshme. Vendimi *nuk* mund të merret vetëm nga kushti $|x-c| \leq R$.

Teorema 3.2 — Karakteri i skajeve

Për çdo kombinim të përfshirjes ose përjashtimit të dy skajeve ekziston një seri reale e fuqive me rreze $R = 1$ që e realizon atë. Shembujt bazë janë $\sum_{n\geq 1} x^n/n^2$, $\sum_{n\geq 1} x^n/n$, $\sum_{n\geq 1} (-1)^n x^n/n$, $\sum_{n\geq 0} x^n$.

Në rendin e mësipërm, intervalet janë $[-1,1]$, $[-1,1)$, $(-1,1]$ dhe $(-1,1)$. Në rastin $\sum x^n/n$, në $x=-1$ zbatohet Leibniz, në $x=1$ kemi serinë harmonike; me $(-1)^n x^n/n$ skajet shkëmbehen.

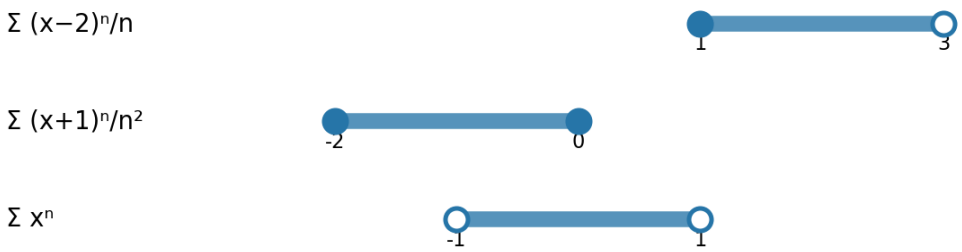


Figura 2: Tri intervale konvergjence. Pika e mbushur tregon përfshirje; pika e zbrazët tregon përjashtim. Klasifikimi rrjedh nga kriteret teorike për secilin skaj.

5 Konvergjenca uniforme dhe vazhdimësia

Konvergjenca absolute për një x fiks nuk duhet ngatërruar me konvergjencën uniforme për një bashkësi vlerash të x.

Teorema 3.3 — Konvergjenca uniforme lokale

Nëse seria e fuqive ka rreze $R > 0$, për çdo r me $0 \le r < R$, seria konvergjon absolutisht dhe uniformisht në segmentin $[c-r, c+r]$. Si rrjedhim, shuma $f(x) = \sum a_n (x-c)^n$ është e vazhdueshme në $(c-R, c+R)$.

Vërtetim. Zgjedhim s me $r < s < R$. Meqë seria $\sum |a_n| s^n$ konvergjon, për çdo $|x-c| \le r$ kemi

$$|a_n (x-c)^n| \le |a_n| r^n \le |a_n| s^n.$$

Seria e majorantëve konvergjon, ndaj kriteri M i Weierstrass-it provon konvergjencën uniforme. Çdo P_N është i vazhdueshëm, kështu limiti uniform është i vazhdueshëm në çdo segment të tillë; duke zgjedhur r rreth çdo pike të brendshme, kemi vazhdimësinë në gjithë intervalin e hapur. ∎

Kufiri i teoremës

Konvergjenca uniforme në segmentet kompakte të brendshme *nuk* garanton konvergjencë uniforme në gjithë $(c-R, c+R)$, dhe nuk vendos çfarë ndodh në skaje. Për shembull, $\sum_{n \ge 0} x^n$ nuk konvergjon uniformisht në $(-1, 1)$: termat x^n nuk shkojnë uniformisht në zero atje.

6 Derivimi dhe integrimi term pas termi

Teorema 3.4 — Veprimet diferenciale dhe integrale

Nëse $R > 0$ dhe $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$, atëherë për $|x-c| < R$ kemi

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-c)^{n-1}, \qquad \int_c^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-c)^{n+1}.$$

Të dy seritë e transformuara kanë të njëjtën rreze R. Këto formula nuk deklarojnë asgjë për skajet.

Vërtetim. Së pari vërtetojmë barazinë e rrezeve. Rrënjët e koeficientëve të serisë së derivuar, pas riindeksimit, kanë formën $\left|(n+1)a_{n+1}\right|^{1/n}$. Për $n \to \infty$, faktori $(n+1)^{1/n} \to 1$ dhe kalimi nga eksponenti $1/(n+1)$ te $1/n$ nuk e ndryshon kufirin superior të zgjeruar të rrënjëve. Në mënyrë të ngjashme, koeficientët e primitivit janë $a_n/(n+1)$, ndërsa $(n+1)^{1/(n+1)} \to 1$. Kështu të dy seritë kanë rrezen R (edhe për $R = +\infty$). Tani fiksojmë $0 < r < s < R$. Nga konvergjenca e $\sum |a_n| s^n$ kemi një $M > 0$ të tillë që $|a_n| s^n \le M$ për çdo n. Për $|x-c| \le r$ dhe $n \ge 1$,

$$|n a_n (x-c)^{n-1}| \le \frac{M}{r}\, n \left(\frac{r}{s}\right)^n.$$

Meqë $r/s < 1$, seria e majorantëve konvergjon. Kriteri M garanton konvergjencë uniforme të P_N' në $[c-r, c+r]$ drejt një funksioni të vazhdueshëm g. Për të gjitha x në këtë segment, identiteti

$$P_N(x) - P_N(c) = \int_c^x P_N'(t)\,dt$$

kalon në limit nga konvergjenca uniforme dhe jep $f(x) - f(c) = \int_c^x g(t)\,dt$. Sipas teoremës themelore të analizës, $f' = g$. Meqë çdo pikë $|x-c| < R$ gjendet në një segment të tillë,

përfundimi vlen në gjithë intervalin e hapur. Së fundi, konvergjenca uniforme e P_N në segmentin që lidh c me x lejon integrimin term pas termi. ∎

6.1 Një identitet i kontrollueshëm

Nga seria gjeometrike për $|x| < 1$,

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n,$$

duke derivuar marrim

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n, \qquad |x| < 1.$$

Kufiri $|x| < 1$ duhet të shoqërojë identitetin pas derivimit.

7 Shembuj të zgjidhur me analizë të skajeve

7.1 Shembulli 1 — Interval gjysmë i mbyllur

Për $\sum_{n=1}^{\infty} (x-2)^n/n$, raporti i koeficientëve jep $R = 1$ dhe qendra është $c = 2$. Në $x = 1$ kemi $\sum (-1)^n/n$, e cila konvergjon me Leibniz (jo absolutisht); në $x = 3$ kemi $\sum 1/n$, divergjente. Prandaj

$$\boxed{I = [1, 3).}$$

7.2 Shembulli 2 — Të dy skajet përfshihen

Për $\sum_{n=1}^{\infty} (x+1)^n/n^2$ koeficientët kanë n-rrënjë me limit 1, pra $R = 1$ dhe qendra $c = -1$. Në $x = -2, 0$ seria ka kufiza në vlerë absolute $1/n^2$, prandaj

$$\boxed{I = [-2, 0].}$$

7.3 Shembulli 3 — Rrezja zero

Për $\sum_{n=0}^{\infty} n!(x-1)^n$, raporti i termave absolutë (kur $x \neq 1$) është $(n+1)|x-1| \to \infty$; në qendër shuma është 1. Bashkësia e konvergjencës është saktësisht $\{1\}$ dhe $R = 0$.

7.4 Shembulli 4 — Rrezja e pafundme

Për $\sum_{n=0}^{\infty} (x-1)^n/n!$, raporti absolut është $|x-1|/(n+1) \to 0$ për çdo $x \in \mathbb{R}$. Prandaj $R = +\infty$ dhe seria konvergjon për çdo x.

7.5 Shembulli 5 — Fuqitë çift

Seria $\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}/4^n$ është gjeometrike me raport $q = x^2/4$. Kërkohet $|x^2/4| < 1$, pra $|x| < 2$. Në $x = \pm 2$, termi i përgjithshëm është 1 dhe nuk shkon në zero. Intervali është $(-2, 2)$, ndërsa shuma për $|x| < 2$ është $1/(1 - x^2/4)$.

7.6 Shembulli 6 — Limit i rrënjës pa ekzistencë të limitit të zakonshëm

Vendosim $a_n = 2^n$ për n çift dhe $a_n = 3^n$ për n tek. Meqë $\limsup |a_n|^{1/n} = 3$, kemi $R = 1/3$. Në $x = 1/3$, kufizat me indeks tek janë 1, ndërsa në $x = -1/3$ janë -1; termat nuk shkojnë në zero, prandaj $I = (-1/3, 1/3)$.

8 Shembull parametrik me klasifikim të plotë

Problemi. Për $p > 0$, të përcaktohet bashkësia e konvergjencës së

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^p}.$$

Hapi 1: rrezja. Me $a_n = n^{-p}$, kemi $|a_n|^{1/n} = \exp(-p \log n / n) \to 1$; prandaj $R = 1$ dhe intervali i brendshëm është $(0, 2)$. **Hapi 2: skaji i majtë** $x = 0$**.** Seria bëhet $\sum (-1)^n / n^p$. Meqë n^{-p} është monoton zbritës dhe shkon në zero, seria konvergjon sipas Leibnizit për çdo $p > 0$. Ajo konvergjon absolutisht vetëm kur $p > 1$. **Hapi 3: skaji i djathtë** $x = 2$**.** Seria bëhet $\sum 1/n^p$, e cila konvergjon atëherë dhe vetëm atëherë kur $p > 1$.

$$\boxed{E_p = \begin{cases} [0, 2), & 0 < p \le 1, \\ [0, 2], & p > 1. \end{cases}}$$

Interpretim. Rrezja është e njëjtë për çdo $p > 0$, por natyra e konvergjencës në skaje varet nga parametri. Për $0 < p \le 1$, skaji i majtë jep konvergjencë kushtore.



Figura 3: Bashkësia E_p për $\sum_{n=1}^{\infty} (x-1)^n / n^p$: rrezja mbetet $R = 1$, ndërsa skaji i djathtë përfshihet vetëm kur $p > 1$.

9 Pse kufijtë numerikë nuk janë prova

Shumat e pjesshme dhe grafiqet shërbejnë për zbulimin e hipotezave, jo për certifikimin e konvergjencës. Për shembull, në $x = 1$ seria gjeometrike $\sum x^n$ ka $P_N(1) = N + 1$, ndërsa për çdo $|x| < 1$, $P_N(x) \to 1/(1-x)$. Prandaj një graf i prerë në një numër të fundmë termash nuk mund të vendosë sjelljen në skaj. Për çdo eksperiment numerik studenti duhet të shkruajë: (i) domenin teorik, (ii) hipotezën, (iii) kriterin që e provon dhe (iv) kufirin e gabimit kur është i disponueshëm.

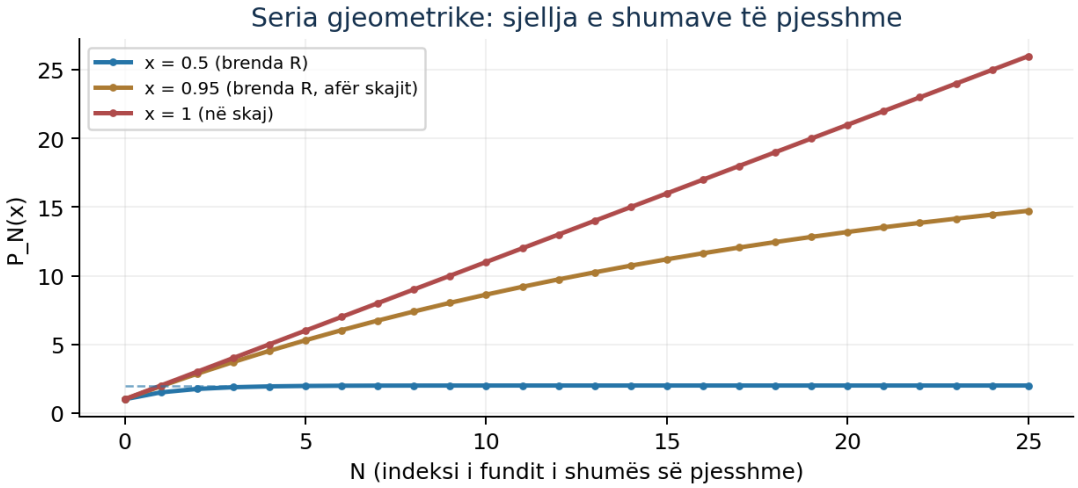


Figura 4: Eksperiment numerik për $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$. Ndryshimi i sjelljes së $P_N(x)$ pranë $x = 1$ ilustron pse vëzhgimi i fundmë nuk e zëvendëson vërtetimin.

10 Vlerësimi i mbetjes në rastin gjeometrik

Nëse $|q| < 1$ dhe $S_N = \sum_{n=0}^{N} q^n$, atëherë

$$S = \frac{1}{1-q}, \qquad S - S_N = \frac{q^{N+1}}{1-q}, \qquad |S - S_N| \le \frac{|q|^{N+1}}{1-|q|}.$$

Pabarazia e fundit është një garanci teorike që mund të përdoret para llogaritjes numerike; për $q = 1/2$ gabimi i saktë është 2^{-N}.

11 Gabime metodologjike, kontrolli dhe detyra

Pesë gabime që duhen shmangur

1. Të vendoset automatikisht $|x - c| \le R$ pa kontrolluar secilin skaj.
2. Të përdoret kriteri i raportit si vendimtar kur kufiri i tij është 1.
3. Të supozohet se $\limsup |a_n|^{1/n}$ mund të zëvendësohet nga një limit që nuk ekziston.
4. Të ngatërrohet pika $x = c$ me një skaj për $R = 0$.
5. Të argumentohet konvergjenca uniforme në gjithë intervalin e hapur vetëm nga uniformiteti në kompakte.

Detyra për studim të pavarur. (1) Gjeni rrezen dhe intervalin e $\sum_{n=1}^{\infty} (x-2)^n/(3^n n)$. (2) Studioni $\sum_{n=1}^{\infty} (x+2)^n/[n(n+1)]$. (3) Për $p > 0$, klasifikoni intervalin e $\sum_{n=1}^{\infty} (x-1)^n/n^p$. (4) Jepni një shembull të një serie ku kriteri i raportit për koeficientët nuk ka limit, por formula Cauchy–Hadamard përcakton rrezen.

Protokolli i verifikimit për çdo seri fuqish

1. Identifikoni qendrën dhe eksponentin e saktë të ndryshores.
2. Nxirrni R me formulën e rrënjës ose me raportin vetëm kur ky limit ekziston.
3. Ndani qartë: $|x-c|<R$, $|x-c|>R$ dhe secilin skaj.
4. Për secilin skaj shkruani serinë numerike të fituar dhe kriterin e vlefshëm, bashkë me hipotezat.
5. Dalloni konvergjencën absolute nga ajo kushtore; mos përdorni një grafik si provë.

12 Literatura dhe kufijtë e kapitullit

1. M. Ofendija, *Analiza Matematike II*, ShBLU, Tiranë, 2005, kapitulli X (sipas syllabus-it të kursit).
2. W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, 3rd ed., McGraw–Hill, 1976, kreu 3 (literaturë plotësuese sipas syllabus-it).
3. T. M. Apostol, *Mathematical Analysis*, 2nd ed., Addison–Wesley, 1974, pjesët mbi seritë dhe konvergjencën (literaturë shtesë për krahasim).

Materiali fokusohet në rrezen dhe intervalin e konvergjencës. Zhvillimet Taylor/Maclaurin dhe Fourier trajtohen në kapituj të posaçëm të kursit; rrjedhojat diferenciale të serive të fuqive përfshihen këtu vetëm si lidhje teorike. Material didaktik i përgatitur për kontroll editorial.

Përputhja me temën III të syllabus-it të kursit është kontrolluar; statusi nuk nënkupton recension të jashtëm.