UNIVERSITETI I SHKODRËS „LUIGJ GURAKUQI” • FAKULTETI I SHKENCAVE TË NATYRËS
DEPARTAMENTI I MATEMATIKËS

Analizë Matematike 3

Leksioni 1: Seritë numerike, konceptet bazë

Prof. As. Dr. Siditë Duraj · CIKLI në Matematikë · Viti akademik 2026–2027

1. Objektivat dhe motivimi

Në fund të këtij leksioni studenti duhet të jetë në gjendje:

1. të përkufizojë serinë numerike, kufizën e përgjithshme dhe vargun e shumave të pjesshme;
2. të dallojë një seri konvergjente nga një seri divergjente dhe të njehsojë shumën e serive të thjeshta (gjeometrike, teleskopike);
3. të zbatojë kushtin e domosdoshëm të konvergjencës dhe të shpjegojë pse ai nuk është i mjaftueshëm;
4. të formulojë dhe të zbatojë kriterin e Koshit për seritë;
5. të përdorë vetitë themelore të serive konvergjente.

Parakushte nga Analiza Matematike 1: vargjet numerike, limiti i vargut, vargjet monotone dhe të kufizuara, vargjet e Koshit (vargjet themelore), plotësia e $\mathbb{R}$.

Tema e syllabusit: Tema I – Seritë numerike dhe konvergjenca e tyre. **Literatura bazë:** Ofendija, M., *Analiza Matematike II*, ShBLU, Tiranë, 2005, Kap. IX, fq. 3–15.

Motivimi: a mund të mblidhen pafundësisht shumë numra?

Paradoksi i dikotomisë i Zenonit: një vrapues duhet të përshkojë distancën 1. Në fillim përshkon gjysmën, pastaj gjysmën e asaj që mbeti, e kështu me radhë. Distanca e përshkuar pas n hapash është

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

Asnjë S_n nuk është i barabartë me 1, por kur $n \to \infty$ kemi $S_n \to 1$. Pra, „shuma e pafundme” $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$ ka kuptim vetëm si **limit i shumave të fundme**. Kjo është ideja qendrore e gjithë teorisë së serive: një shumë e pafundme nuk njehsohet drejtpërdrejt, por përmes vargut të shumave të pjesshme.

Shembull paralajmërues: për shumën $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$, grupimi $(1 - 1) + (1 - 1) + \cdots$ jep 0, ndërsa $1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \cdots$ jep 1. Rregullat e shumave të fundme (shoqërimi, ndërrimi i vendeve) nuk vlejnë automatikisht për shumat e pafundme. Prandaj na duhet një përkufizim i saktë.

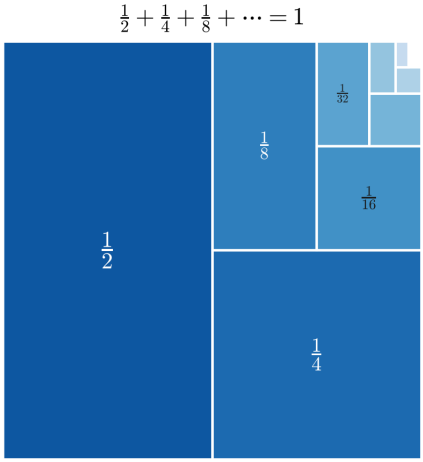


Figura 1. Katrori njësi i ndarë njëpasnjë në gjysma: pjesët mbulojnë gjithë katrorin, por asnjë numër i fundmë pjesësh nuk e mbulon plotësisht.

2. Përkufizimi i serisë numerike dhe i konvergjencës

Përkufizimi 1. Le të jetë $(a_n)_{n\geq 1}$ një varg numrash realë. Shprehja

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

quhet **seri numerike**. Numri a_n quhet **kufizë e përgjithshme** (kufiza e n-të) e serisë.

Përkufizimi 2. Shuma e n kufizave të para

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

quhet **shuma e pjesshme e n-të** e serisë. Vargu $(S_n)_{n\geq 1}$ quhet **vargu i shumave të pjesshme**.

Përkufizimi 3. Seria $\sum a_n$ quhet **konvergjente** nëse vargu i shumave të pjesshme (S_n) ka limit të fundmë S:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n, \qquad \text{dhe shkruajmë} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S.$$

Numri S quhet **shuma e serisë**. Nëse limiti i S_n nuk ekziston ose është i pafundmë, seria quhet **divergjente**. Nëse $S_n \to +\infty$ (ose $-\infty$), themi se seria divergjon në $+\infty$ (ose $-\infty$).

Vërejtje metodike

Në këtë leksion dallojmë katër objekte: vargun e kufizave (a_n), serinë $\sum a_n$, vargun e shumave të pjesshme (S_n) dhe shumën S (kur ajo ekziston).

- **Dy objekte, një emërtim.** Simboli $\sum a_n$ përdoret edhe për vetë serinë (si objekt formal), edhe për shumën e saj (kur ajo ekziston). Studentët duhet të dallojnë qartë të dy kuptimet.
- **Seria dhe vargu i shumave të pjesshme.** Seria $\sum a_n$ përcaktohet plotësisht nga vargu (a_n),

dhe ky përcakton në mënyrë të vetme vargun (S_n). Sipas Përkufizimit 3, natyra e serisë dhe shuma e saj janë natyra dhe limiti i vargut (S_n). Anasjelltas, çdo varg (S_n) është varg shumash të pjesshme të një serie të vetme: asaj me $a_1 = S_1$ dhe $a_n = S_n - S_{n-1}$ për $n \geq 2$. Pra pyetjet mbi konvergjencën e serive janë pyetje mbi konvergjencën e vargjeve; teoria e serive nuk është teori e re, por një mënyrë e re e të shikuarit të vargjeve.

- **Mos ngatërroni a_n me S_n.** Gabimi më i shpeshtë: „$a_n \to 0$, pra seria konvergjon". Konvergjenca e serisë lidhet me S_n, jo me a_n (shih seksionin 4).
- **Indeksi i fillimit.** Seria mund të fillojë nga $n = 0$ ose nga çdo $n = n_0$. Natyra e serisë (konvergjente apo divergjente) nuk varet nga kjo zgjedhje (seksioni 6).

Shembulli 2.1 — nga përkufizimi

Për serinë $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ kemi $S_n = 1$ kur n është tek dhe $S_n = 0$ kur n është çift. Vargu (S_n) ka dy nënvargje me limite të ndryshme, pra nuk ka limit. **Seria është divergjente.** Kështu zgjidhet edhe „paradoksi" i grupimeve në seksionin 1: seria nuk ka shumë fare.

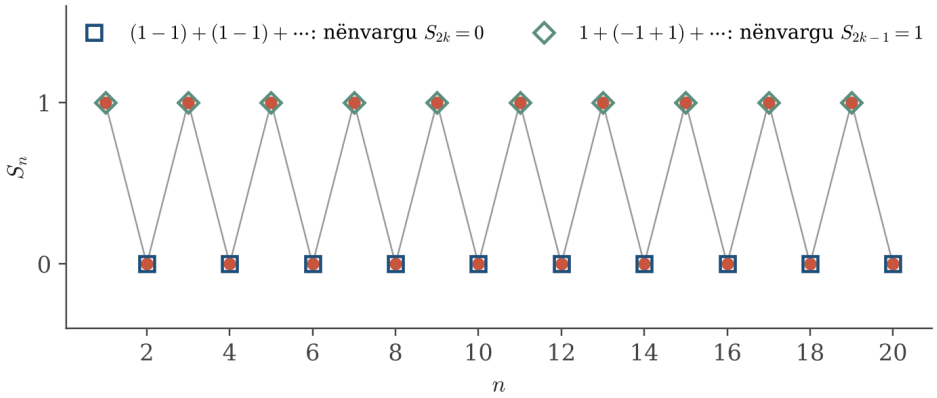


Figura 2. Shumat e pjesshme të serisë $1 - 1 + 1 - \cdots$. Dy grupimet e ndryshme zgjedhin dy nënvargje me limite të ndryshme, 0 dhe 1.

Për serinë $\sum_{n\geq 1} 1 = 1 + 1 + 1 + \cdots$ kemi $S_n = n \to +\infty$; seria divergjon në $+\infty$.

3. Shembuj themelorë

Tri familje serish që do të na shërbejnë si „pika krahasimi" gjatë gjithë kursit: seria gjeometrike, seritë teleskopike dhe seria harmonike.

3.1 Seria gjeometrike

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n + \cdots, \qquad q \in \mathbb{R}.$$

Teorema 1. *Seria gjeometrike $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ është konvergjente atëherë dhe vetëm atëherë kur $|q| < 1$, dhe në këtë rast*

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

Vërtetim. Këtu $S_n = 1 + q + \cdots + q^n$ (ka $n+1$ kufiza, sepse indeksi fillon nga 0). Për $q \neq 1$, nga formula e progresionit gjeometrik,

$$S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

- Nëse $|q| < 1$, atëherë $q^{n+1} \to 0$, pra $S_n \to \frac{1}{1-q}$.
- Nëse $q = 1$, formula nuk vlen; drejtpërdrejt $S_n = n + 1 \to +\infty$: seria divergjon.
- Nëse $q = -1$, atëherë S_n merr alternativisht vlerat 1 dhe 0: seria divergjon.
- Nëse $q > 1$, atëherë $q^{n+1} \to +\infty$, pra $S_n = \frac{q^{n+1}-1}{q-1} \to +\infty$: seria divergjon.
- Nëse $q < -1$, atëherë $|S_n| \geq \frac{|q|^{n+1}-1}{|1-q|} \to +\infty$ dhe S_n ndryshon shenjë: vargu (S_n) nuk ka limit (as të fundmë, as të pafundmë), pra seria divergjon. ■

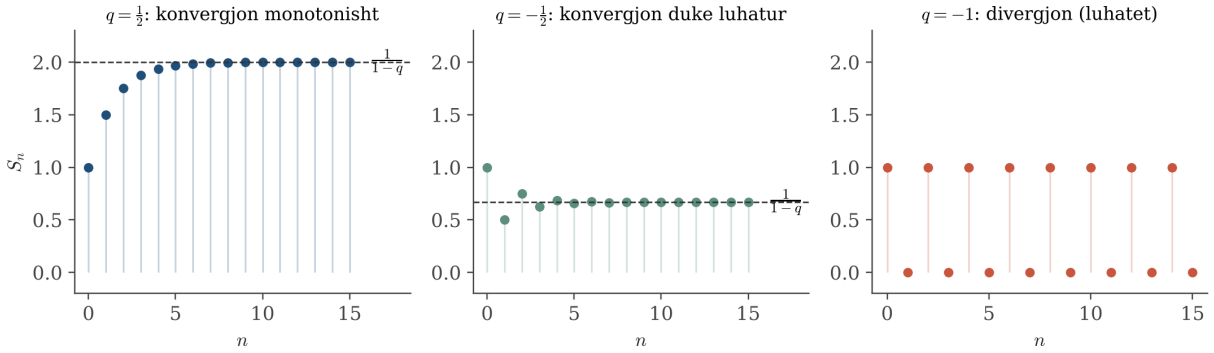


Figura 3. Shumat e pjesshme S_n të serisë gjeometrike $\sum_{n\geq 0} q^n$ për $q = \frac{1}{2}$, $q = -\frac{1}{2}$ dhe $q = -1$. Për $q = -\frac{1}{2}$ shumat e pjesshme kalojnë herë mbi, herë nën limitin $\frac{2}{3}$; për $q = -1$ limiti nuk ekziston.

Në trajtën e përgjithshme, me kufizë të parë $a \neq 0$: $a + aq + aq^2 + \cdots = \frac{a}{1-q}$ për $|q| < 1$, ndërsa për $|q| \geq 1$ seria divergjon. Kur indeksi fillon nga 1, kemi $\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1-q}$ për $|q| < 1$. Shembuj: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = \frac{1/2}{1-1/2} = 1$ (Zenoni); $0{,}999\ldots = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \cdots = \frac{9/10}{1-1/10} = 1$.

Vërtetim pa fjalë. Marrim trekëndëshin barabrinjës T_0 me syprinë 1. E ndajmë me vijat e mesme në 4 trekëndësha të barabartë, secili me syprinë $\frac{1}{4}$ të T_0: ngjyrosim me të errët atë poshtë majtas, dy të tjerët poshtë i lëmë të çelët, ndërsa trekëndëshin e sipërm T_1 e ndajmë sërish në të njëjtën mënyrë. Pra në hapin e n-të ngjyroset një trekëndësh me syprinë sa $\frac{1}{4}$ e trekëndëshit T_{n-1} që ndahet, d.m.th. me syprinë $\frac{1}{4^n}$. Në çdo hap, nga tre trekëndëshat që nuk ndahen më, një është i errët dhe dy janë të çelët, me syprinë të njëjtë. Pas n hapash, pjesa e errët ka syprinë $\frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right)$, sepse T_0 pa T_n ndahet në pjesë të errëta dhe të çelëta në raportin $1 : 2$. Kur $n \to \infty$, syprina e T_n shkon në 0, prandaj pjesa e errët zë saktësisht $\frac{1}{3}$ e T_0.

3.2 Seritë teleskopike

Nëse kufiza e përgjithshme shkruhet në trajtën $a_n = b_n - b_{n+1}$ $(n \geq 1)$, atëherë kufizat e ndërmjetme thjeshtohen:

$$S_n = (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \cdots + (b_n - b_{n+1}) = b_1 - b_{n+1}.$$

Pra seria konvergjon atëherë dhe vetëm atëherë kur vargu (b_n) ka limit të fundmë L, dhe shuma është $b_1 - L$.

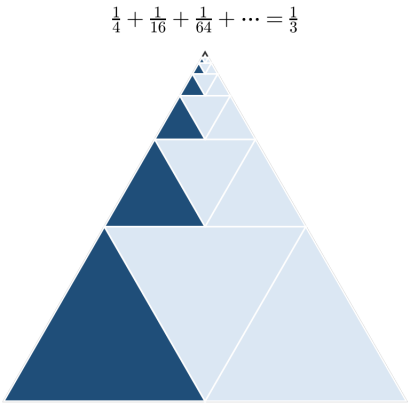


Figura 4. Vërtetim gjeometrik i barazimit $\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\cdots=\frac{1}{3}$: në hapin e n-të trekëndëshi i errët ka syprinë $\frac{1}{4^n}$; pjesët e errëta zënë një të tretën e trekëndëshit fillestar.

Shembulli 3.1 (seria e Mengolit).

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right),\qquad S_n=1-\frac{1}{n+1}\to 1.$$

Seria është konvergjente dhe shuma e saj është 1.

Shembulli 3.2. Seria $\sum_{n\ge 1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\sum_{n\ge 1}\left[\ln(n+1)-\ln n\right]$ është teleskopike me $b_n=-\ln n$. Këtu $S_n=\ln(n+1)\to+\infty$, pra seria divergjon, edhe pse kufiza e përgjithshme $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\to 0$.

3.3 Seria harmonike

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

> **Teorema 2.** *Seria harmonike është divergjente (divergjon në $+\infty$).*

Vërtetim (Oresme, rreth vitit 1350). Grupojmë kufizat në blloqe me $1,2,4,8,\ldots$ kufiza:

$$S_{2^k}=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{8}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^{k-1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^k}\right).$$

Pas kufizës së parë 1 kemi k blloqe. Blloku i j-të ($j=1,2,\ldots,k$) përmban kufizat nga $\frac{1}{2^{j-1}+1}$ deri te $\frac{1}{2^j}$, pra ka 2^{j-1} kufiza, secila $\ge\frac{1}{2^j}$; shuma e tij është $\ge 2^{j-1}\cdot\frac{1}{2^j}=\frac{1}{2}$. (Për $j=1$ blloku është vetëm $\frac{1}{2}$.) Rrjedhimisht $S_{2^k}\ge 1+\frac{k}{2}\to+\infty$. Meqenëse (S_n) është rritës dhe ka nënvarg që shkon në $+\infty$, atëherë $S_n\to+\infty$. ∎

Divergjenca është shumë e ngadaltë, gjë që e bën intuitën mashtruese: $S_n\approx\ln n+\gamma$, ku $\gamma\approx 0{,}5772$ është konstantja e Eulerit–Maskeronit (ky përafrim do të arsyetohet me kriterin integral në Temën II).

n	10	100	1 000	1 000 000
S_n (rrumbullakosur në 3 shifra pas presjes)	2,929	5,187	7,485	14,393

Pyetje për diskutim në auditor: sa kufiza duhen që S_n të kalojë vlerën 20? (Përgjigje: rreth $2{,}7\cdot 10^8$.) Kjo tregon pse konvergjenca nuk mund të „shihet” me llogaritje numerike.

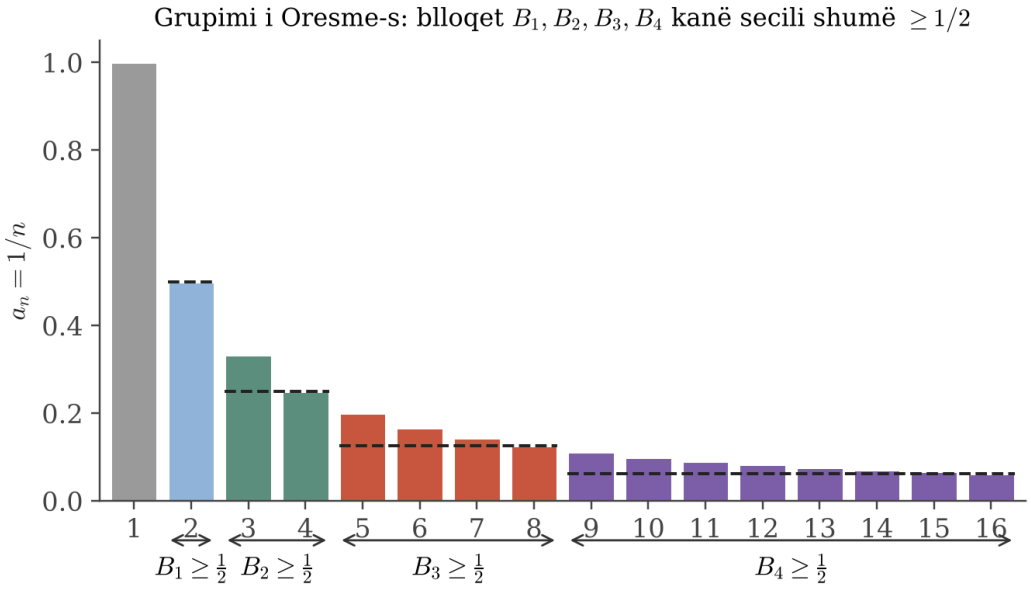


Figura 5. Kufizat $\frac{1}{n}$ dhe blloqet e Oresme-s $B_1, \ldots, B_4$. Vija e ndërprerë tregon kufizën më të vogël të bllokut, $\frac{1}{2^j}$; meqë blloku B_j ka 2^{j-1} kufiza, shuma e tij është të paktën $2^{j-1} \cdot \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2}$.

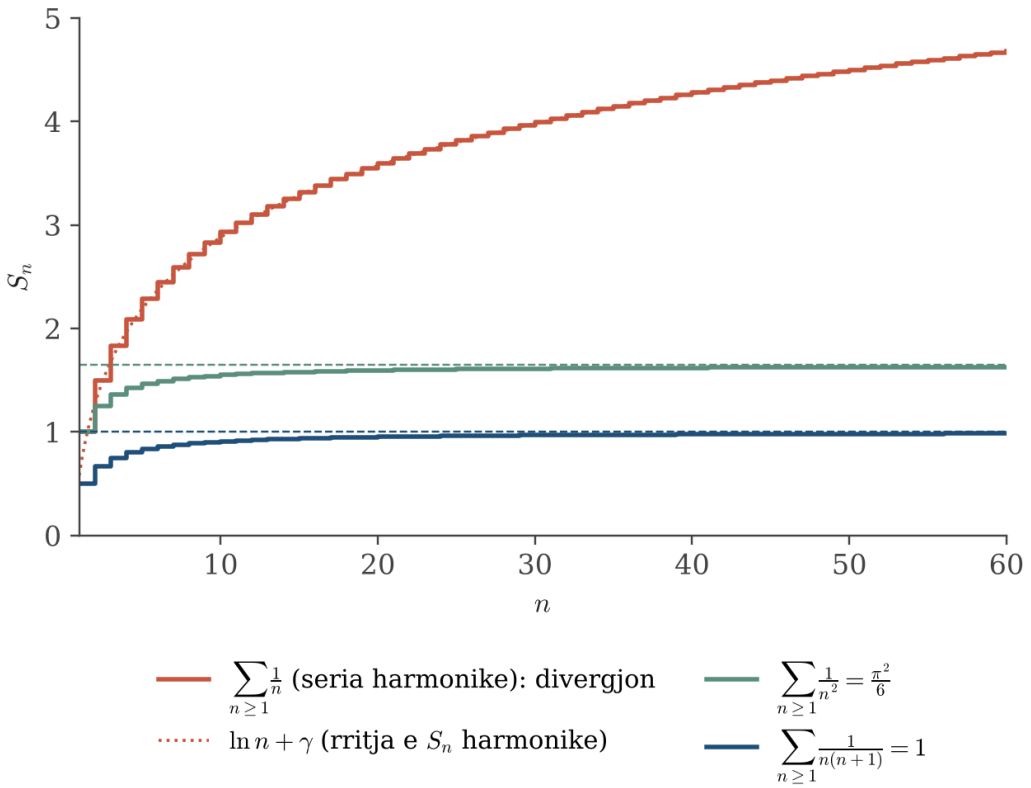


Figura 6. Shumat e pjesshme S_n ($n = 1, \ldots, 60$) të serive $\sum \frac{1}{n}$, $\sum \frac{1}{n^2}$ dhe $\sum \frac{1}{n(n+1)}$. Të tria kanë kufizë të përgjithshme që shkon në 0, por vetëm seria harmonike divergjon, duke u rritur si $\ln n + \gamma$. Figura tregon vetëm një numër të fundmë shumash të pjesshme: ajo ilustron, por nuk vërteton, konvergjencën ose divergjencën.

4. Kushti i domosdoshëm i konvergjencës

Teorema 3 (kushti i domosdoshëm). *Nëse seria $\sum a_n$ është konvergjente, atëherë $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.*

Vërtetim. Le të jetë $S_n \to S$. Për $n \geq 2$ kemi $a_n = S_n - S_{n-1}$. Meqenëse edhe $S_{n-1} \to S$, marrim $a_n \to S - S = 0$. ■

Si përdoret: trajta kundërpozitive

Në praktikë teorema përdoret si **kriter divergjence**:

$$a_n \not\to 0 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ është divergjente.}$$

Kjo përfshin rastin kur limiti i a_n është i ndryshëm nga zero dhe rastin kur ai nuk ekziston.

Shembulli 4.1. $\sum \frac{n}{2n+1}$ divergjon, sepse $a_n \to \frac{1}{2} \neq 0$.

Shembulli 4.2. $\sum \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ divergjon, sepse $a_n \to e \neq 0$.

Shembulli 4.3. $\sum \cos n$ divergjon, sepse $\cos n$ nuk shkon në 0. Vërtet, nëse $\cos n \to 0$, nga $\cos 2n = 2\cos^2 n - 1$ do të kishim $\cos 2n \to -1$; nga ana tjetër, $(\cos 2n)$ është nënvarg i $(\cos n)$, pra duhet të shkonte në 0. Kundërthënie.

Kushti nuk është i mjaftueshëm

Anasjellja e teoremës është e gabuar. Dy kundërshembuj i kemi parë tashmë:

- seria harmonike $\sum \frac{1}{n}$: $a_n = \frac{1}{n} \to 0$, por seria divergjon;
- seria $\sum \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$: $a_n \to 0$, por $S_n = \ln(n+1) \to +\infty$.

Përfundim për studentin: kushti $a_n \to 0$ është hapi i parë i kontrollit. Nëse nuk plotësohet, seria divergjon dhe punën e kemi mbaruar. Nëse plotësohet, **nuk kemi vërtetuar asgjë** dhe duhen argumente të tjera: kriteri i Koshit (seksioni 5) ose kriteret e Temës II (krahasimi, kriteri i D'Alembert-it, kriteri i rrënjës i Koshit, kriteri integral).

5. Kriteri i Bolcano–Koshit për seritë

Kriteri i Koshit jep një kusht të nevojshëm dhe të mjaftueshëm për konvergjencë, pa e njohur paraprakisht shumën S.

Teorema 4 (Bolcano–Koshi). *Seria $\sum a_n$ është konvergjente atëherë dhe vetëm atëherë kur për çdo $\varepsilon > 0$ ekziston një numër natyror $N = N(\varepsilon)$ i tillë që për çdo $n > N$ dhe për çdo $p \geq 1$:*

$$|S_{n+p} - S_n| = \left|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}\right| < \varepsilon.$$

Vërtetim. Kujtojmë se $S_{n+p} - S_n = a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}$.

Kushti është i nevojshëm. Le të jetë $S_n \to S$. Për $\varepsilon > 0$ ekziston N i tillë që $|S_n - S| < \frac{\varepsilon}{2}$ për çdo $n > N$. Atëherë për $n > N$ dhe $p \geq 1$ kemi edhe $n + p > N$, prandaj

$$|S_{n+p} - S_n| \leq |S_{n+p} - S| + |S - S_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Kushti është i mjaftueshëm. Le të plotësohet kushti. Për $m > n > N$ shënojmë $p = m - n \geq 1$ dhe marrim $|S_m - S_n| < \varepsilon$, pra (S_n) është varg Koshi (varg themelor). Sipas plotësisë së $\mathbb{R}$ (Analiza 1), çdo varg Koshi në $\mathbb{R}$ është konvergjent. Pra (S_n) ka limit të fundmë dhe seria konvergjon. ■

Interpretimi. Seria konvergjon atëherë dhe vetëm atëherë kur çdo „copë" e saj, sado e gjatë, e marrë mjaftueshëm larg, ka shumë sa të duam të vogël në vlerë absolute.

Rrjedhim. Për $p = 1$ merret $|a_{n+1}| < \varepsilon$ për $n > N$, d.m.th. $a_n \to 0$. Pra kushti i domosdoshëm (Teorema 3) është rast i veçantë i kriterit të Koshit.

Mohimi i kriterit (për divergjencë). Seria divergjon atëherë dhe vetëm atëherë kur ekziston $\varepsilon_0 > 0$ i tillë që për çdo N ekzistojnë $n > N$ dhe $p \geq 1$ me $|a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| \geq \varepsilon_0$.

Shembulli 5.1 — seria harmonike, vërtetim i dytë

Për çdo $n \geq 1$ marrim $p = n$:

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Me $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$, për çdo N mjafton të marrim $n = N + 1$ dhe $p = n$: kushti i Koshit nuk plotësohet, pra $\sum \frac{1}{n}$ divergjon.

Shembulli 5.2 — seria $\sum \frac{1}{n^2}$ është konvergjente

Për $k \geq 2$ kemi $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$. Prandaj, për çdo $n \geq 1$ dhe $p \geq 1$:

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k^2} < \sum_{k=n+1}^{n+p} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n}.$$

Për $\varepsilon > 0$ të dhënë mjafton $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$: për $n > N$ kemi $n > \frac{1}{\varepsilon}$, pra $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Pra kriteri i Koshit **vërteton konvergjencën** e serisë, por nuk jep vlerën e shumës. Fakti që shuma është $\frac{\pi^2}{6}$ (problemi i Bazelit, zgjidhur nga Euleri në vitet 1734–1735) është rezultat i veçantë, që do ta vërtetojmë me seritë e Furierit.

Nga e njëjta llogaritje, duke kaluar në limit kur $p \to \infty$, del edhe vlerësimi i mbetjes $0 < S - S_n \leq \frac{1}{n}$ (shih seksionin 6.3).

Lidhja e figurës me kriterin e Koshit. Figura tregon afërsinë e S_n me limitin S, ndërsa kriteri i Koshit flet për afërsinë e shumave të pjesshme me njëra-tjetrën, pa përmendur S. Lidhja është mosbarazimi i trekëndëshit: nëse për $n > N$ të gjitha S_n ndodhen në brezin me rreze δ rreth S, atëherë për $n > N$ dhe $p \geq 1$

$$|S_{n+p} - S_n| \leq |S_{n+p} - S| + |S - S_n| < 2\delta.$$

Në figurë $\delta = \varepsilon$, pra diferencat janë më të vogla se 2ε; për të marrë saktësisht kushtin e Koshit me ε mjafton brezi me rreze $\delta = \varepsilon/2$. Kjo është pikërisht pjesa e parë e vërtetimit të Teoremës 4. Vlera e kriterit është se kushti i tij mund të kontrollohet edhe kur S nuk dihet (Shembulli 5.3).

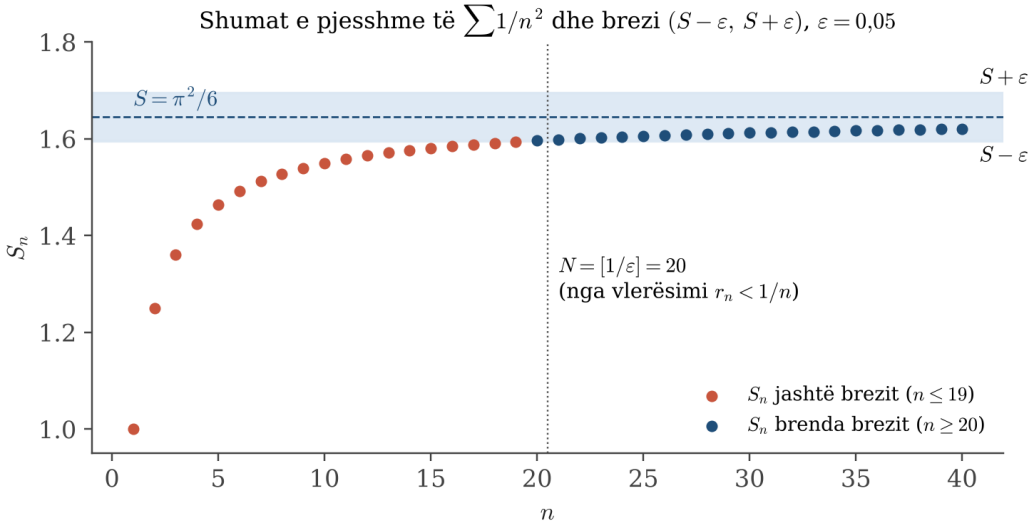


Figura 7. Shumat e pjesshme të $\sum \frac{1}{n^2}$ dhe brezi me rreze $\varepsilon = 0{,}05$ rreth $S = \frac{\pi^2}{6}$. Vlerësimi $S - S_n \le \frac{1}{n}$ garanton që S_n janë në brez për $n > N = [1/\varepsilon] = 20$; në fakt brenda brezit ndodhet edhe S_{20}, ndërsa S_{19} jo.

Shembulli 5.3

Seria $\sum_{n\ge1} \frac{\sin n}{2^n}$ konvergjon, sepse për çdo $n \ge 1$ dhe $p \ge 1$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\sin k}{2^k} \right| \le \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n}\left(1 - \frac{1}{2^p}\right) < \frac{1}{2^n},$$

dhe $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$ për të gjithë n mjaftueshëm të mëdhenj. Këtu nuk e njohim shumën, por e dimë që ajo ekziston. Kjo është fuqia e kriterit të Koshit.

6. Vetitë e serive konvergjente

6.1 Lineariteti

Teorema 5. *Nëse $\sum a_n = A$ dhe $\sum b_n = B$ janë konvergjente, atëherë për çdo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ seria $\sum(\alpha a_n + \beta b_n)$ është konvergjente dhe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha A + \beta B.$$

Vërtetim. Shënojmë me A_n dhe B_n shumat e pjesshme të serive $\sum a_n$ dhe $\sum b_n$. Shuma e pjesshme e serisë së re është $\alpha A_n + \beta B_n \to \alpha A + \beta B$, nga vetitë e limitit të vargjeve. ∎

Rrjedhime të dobishme:

- konvergjente + divergjente = **divergjente** (nëse $\sum(a_n + b_n)$ do të konvergjonte, atëherë $\sum b_n = \sum(a_n + b_n) - \sum a_n$ do të konvergjonte);
- divergjente + divergjente = **nuk dihet**: $\sum 1 + \sum(-1) = \sum 0$ konvergjon, ndërsa $\sum 1 + \sum 1$ divergjon;
- për $\alpha \neq 0$, seritë $\sum a_n$ dhe $\sum \alpha a_n$ janë njëkohësisht konvergjente ose divergjente.

6.2 Heqja ose shtimi i një numri të fundmë kufizash

Teorema 6. *Seria $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ dhe seria $a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots$ (pa m kufizat e para) janë njëkohësisht konvergjente ose divergjente. Në rastin e konvergjencës,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = (a_1 + \cdots + a_m) + \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n.$$

Vërtetim. Nëse T_k është shuma e pjesshme e k-të e serisë së dytë, atëherë $S_{m+k} = S_m + T_k$, ku S_m është numër i fiksuar. Pra $(S_{m+k})_{k\geq 1}$ ka limit të fundmë atëherë dhe vetëm atëherë kur e ka (T_k), dhe në këtë rast $\lim S_n = S_m + \lim T_k$. ■

Pra **natyra** e serisë varet vetëm nga „bishti" i saj; ndryshimi i një numri të fundmë kufizash ndryshon shumën, por jo konvergjencën.

6.3 Pjesa e mbetur e serisë

Përkufizimi 4. Nëse seria $\sum a_n$ është konvergjente, seria

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots$$

quhet **pjesa e mbetur** (mbetja) e n-të e serisë. Nga Teorema 6, r_n ekziston për çdo n.

Teorema 7. *Nëse seria $\sum a_n = S$ është konvergjente, atëherë $S = S_n + r_n$ për çdo n dhe $r_n \to 0$.*

Vërtetim. Barazimi $S = S_n + r_n$ është Teorema 6 me $m = n$. Prandaj $r_n = S - S_n \to S - S = 0$. ■

Kuptimi praktik. Kur e zëvendësojmë shumën S me shumën e pjesshme S_n, **gabimi me shenjë** është $r_n = S - S_n$, ndërsa **gabimi absolut** është $|r_n| = |S - S_n|$. Për serinë gjeometrike $\sum_{n\geq 0} q^n$ me $|q| < 1$:

$$r_n = \frac{q^{n+1}}{1-q}, \qquad |r_n| = \frac{|q|^{n+1}}{1-q}.$$

P.sh. për $q = \frac{1}{2}$ kemi $|r_n| = 2^{-n}$, prandaj gabimi absolut është më i vogël se 10^{-6} atëherë dhe vetëm atëherë kur $2^n > 10^6$, d.m.th. $n \geq 20$ (sepse $2^{19} = 524\,288$ dhe $2^{20} = 1\,048\,576$).

6.4 Grupimi i kufizave (vetia shoqëruese)

Teorema 8. *Nëse seria $\sum a_n = S$ është konvergjente, atëherë çdo seri e përftuar duke grupuar kufizat e saj të njëpasnjëshme në blloqe të fundme (pa ndryshuar radhën e kufizave) është konvergjente dhe ka të njëjtën shumë S.*

Vërtetim. Shumat e pjesshme të serisë së grupuar janë $S_{n_1}, S_{n_2}, S_{n_3}, \ldots$, ku $n_1 < n_2 < \cdots$ janë indekset ku mbyllen kllapat. Ky është një nënvarg i (S_n), prandaj ka të njëjtin limit S. ■

Anasjellja nuk vlen: $(1-1) + (1-1) + \cdots = 0$ konvergjon, por $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ divergjon. Nëse, megjithatë, të gjitha $a_n \geq 0$, atëherë konvergjenca e serisë së grupuar sjell konvergjencën

e serisë fillestare: vargu (S_n) është jozvogëlues dhe ka nënvarg konvergjent (S_{n_k}), pra është i kufizuar nga sipër (çdo $S_n \le S_{n_k}$ për $n_k \ge n$), prandaj konvergjon si varg monoton dhe i kufizuar.

Paralajmërim për vetinë ndërruese. Ndërrimi i radhës së kufizave mund të ndryshojë shumën e një serie konvergjente. Kjo lidhet me dallimin ndërmjet konvergjencës absolute dhe asaj me kusht (teorema e Rimanit), që do të trajtohet në leksionet e ardhshme.

7. Ushtrime të zgjidhura

Ushtrimi 1. Njehsoni shumën e serisë $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{6^n}$.

Zgjidhje. Kufiza e përgjithshme ndahet në dy seri gjeometrike konvergjente: $\frac{2^n+3^n}{6^n} = \left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Nga linearitet:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\tfrac{1}{3}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\tfrac{1}{2}\right)^n = \frac{1/3}{1-1/3} + \frac{1/2}{1-1/2} = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}.$$

Ushtrimi 2. Shkruani numrin periodik 0,272727… si thyesë.

Zgjidhje. $0{,}(27) = \frac{27}{100} + \frac{27}{100^2} + \cdots = \frac{27/100}{1-1/100} = \frac{27}{99} = \frac{3}{11}$.

Ushtrimi 3. Njehsoni $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$.

Zgjidhje. Zbërthim në thyesa të thjeshta: $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right]$. Seria është teleskopike me $b_n = \frac{1}{2(2n-1)}$:

$$S_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) \to \frac{1}{2}.$$

Ushtrimi 4. Njehsoni $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

Zgjidhje. Kemi $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$. Me $b_n = \frac{1}{2n(n+1)}$ seria është teleskopike, $b_n \to 0$, pra shuma është $b_1 = \frac{1}{4}$.

Ushtrimi 5. Njehsoni $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$.

Zgjidhje. Shënojmë $c_n = \ln \frac{n+1}{n}$. Atëherë kufiza e përgjithshme është $c_n - c_{n+1}$, sepse $\frac{(n+1)^2}{n(n+2)} = \frac{n+1}{n} : \frac{n+2}{n+1}$. Meqenëse $c_n \to \ln 1 = 0$, shuma është $c_1 = \ln 2$.

Ushtrimi 6. Studioni konvergjencën e serisë $\sum_{n\ge1} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$.

Zgjidhje. Kemi $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \to 0$, pra kushti i domosdoshëm plotësohet. Por seria është teleskopike: $S_n = \sqrt{n+1} - 1 \to +\infty$. **Seria divergjon.** Ky është një tjetër kundërshembull për anasjelljen e Teoremës 3.

Ushtrimi 7. Studioni konvergjencën e serive: a) $\sum \frac{n^2}{3n^2+n+1}$; b) $\sum n \sin \frac{1}{n}$; c) $\sum \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$.

Zgjidhje. Në të tria rastet $a_n \not\to 0$: a) $a_n \to \frac{1}{3}$; b) $a_n = \frac{\sin(1/n)}{1/n} \to 1$; c) $a_n \to e^{-1}$. Nga kushti i domosdoshëm, të tria seritë divergjojnë.

Ushtrimi 8. Me anë të kriterit të Koshit tregoni se seria $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ divergjon.

Zgjidhje. Për çdo $n \geq 1$ marrim $p = n$:

$$S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq n \cdot \frac{1}{\sqrt{2n}} = \sqrt{\frac{n}{2}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Me $\varepsilon_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ kushti i Koshit nuk plotësohet, pra seria divergjon.

8. Shembuj të zgjedhur

Katër shembuj ku shuma njehsohet saktësisht. Në Shembullin 8.1 përdoret metoda e shumëzimit dhe zbritjes së shumave të pjesshme. Në Shembujt 8.2–8.4 kufiza shkruhet si diferencë $b_n - b_{n+1}$, pra seria është teleskopike.

Shembulli 8.1 (seria aritmetiko-gjeometrike). Vërtetoni se $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 2$.

Zgjidhje. Kjo seri nuk është teleskopike. Përdorim idenë e nxjerrjes së formulës së progresionit gjeometrik: e shumëzojmë shumën e pjesshme me herësin $\frac{1}{2}$ dhe e zbresim nga vetja. Le të jetë $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k}$. Meqë $\frac{1}{2}S_n = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{k-1}{2^k}$, marrim

$$S_n - \frac{1}{2}S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} - \frac{n}{2^{n+1}} = 1 - \frac{1}{2^n} - \frac{n}{2^{n+1}}.$$

Pra $S_n = 2 - \frac{n+2}{2^n} \to 2$, sepse $\frac{n}{2^n} \to 0$.

Shembulli 8.2 (teleskopike me faktoriele). Vërtetoni se $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} = 1$.

Zgjidhje. Shkruajmë $n = (n+1) - 1$, prandaj

$$\frac{n}{(n+1)!} = \frac{(n+1)-1}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}.$$

Seria është teleskopike me $b_n = \frac{1}{n!} \to 0$, pra shuma është $b_1 = 1$.

Shembulli 8.3 (teleskopike me rrënjë). Njehsoni $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}}$.

Zgjidhje. Emëruesi faktorizohet: $(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1} = \sqrt{n}\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)$. Duke shumëzuar numëruesin dhe emëruesin me $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$:

$$\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Pra $S_n = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \to 1$. Shuma është 1.

Shembulli 8.4 (teleskopike me arktangjente). Vërtetoni se $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{2n^2} = \frac{\pi}{4}$.

Zgjidhje. Nga formula $\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x-y}{1+xy}$ (e vlefshme për $x, y > 0$) me $x = 2n+1$, $y = 2n-1$:

$$\operatorname{arctg}(2n+1) - \operatorname{arctg}(2n-1) = \operatorname{arctg} \frac{2}{1+(4n^2-1)} = \operatorname{arctg} \frac{1}{2n^2}.$$

Seria është teleskopike me $b_n = -\operatorname{arctg}(2n-1)$, prandaj $S_n = \operatorname{arctg}(2n+1) - \operatorname{arctg} 1 \to \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$.

Mesazhi metodik. Në të katër rastet shuma u gjet sepse arritëm të shkruajmë S_n në trajtë të mbyllur. Kjo rrallë është e mundur; prandaj në Temën II kalojmë te kriteret, që përcaktojnë natyrën e serisë pa e njehsuar shumën.

9. Përmbledhje dhe ushtrime për punë të pavarur

Përmbledhje

Seria	Natyra	Shuma / arsyeja
$\sum_{n\geq 0} q^n,\ \lvert q\rvert < 1$	konvergjente	$\dfrac{1}{1-q}$
$\sum_{n\geq 0} q^n,\ \lvert q\rvert \geq 1$	divergjente	$q^n \not\to 0$
$\sum \frac{1}{n(n+1)}$	konvergjente	1 (teleskopike)
$\sum \frac{1}{n}$	divergjente	Oresme ose Koshi; $S_n \approx \ln n + \gamma$
$\sum \frac{1}{n^2}$	konvergjente	kriteri i Koshit; shuma $\frac{\pi^2}{6}$
$\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$	divergjente	kriteri i Koshit

Skema e kontrollit për një seri të dhënë:

1. A shkon a_n në 0? Nëse jo, seria divergjon.
2. A është seria gjeometrike, teleskopike ose kombinim linear i tyre? Nëse po, njehsohet S_n dhe limiti i tij.
3. Në të kundërt, përdoret kriteri i Koshit ose kriteret e Temës II.

Ushtrime për punë të pavarur

1. Njehsoni shumën: a) $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{3^n}$; b) $\sum_{n\geq 1} \frac{3^n - 2^n}{5^n}$; c) $\sum_{n\geq 1} \frac{2^{2n+1}}{7^n}$.
2. Shkruani si thyesë numrin $1{,}2(36) = 1{,}2363636\ldots$
3. Njehsoni shumën (në të tria rastet $n \geq 1$): a) $\sum \frac{1}{n(n+3)}$; b) $\sum \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$; c) $\sum \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$.
4. Njehsoni $\sum_{n\geq 1} \operatorname{arctg} \frac{1}{n^2+n+1}$. (Udhëzim: $\operatorname{arctg}(n+1) - \operatorname{arctg} n$.)
5. Tregoni se seritë e mëposhtme divergjojnë: a) $\sum \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$; b) $\sum \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$; c) $\sum \sin n$; d) $\sum \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right)$. (Kujdes: në d) kemi $a_n \to 0$; krahasoni shumat e pjesshme me ato të Shembullit 3.2.)
6. Me anë të kriterit të Koshit tregoni se: a) $\sum \frac{\cos(nx)}{2^n}$ konvergjon për çdo $x \in \mathbb{R}$; b) $\sum \frac{1}{\ln(n+1)}$ divergjon.

7. Gjeni gabimin në arsyetimin: „Le të jetë $S = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots$. Atëherë $S = 1 + 2S$, pra $S = -1$.”
8. Vërtetoni ose hidhni poshtë me kundërshembull: a) nëse $\sum a_n$ dhe $\sum b_n$ divergjojnë, edhe $\sum(a_n + b_n)$ divergjon; b) nëse $\sum a_n$ konvergjon, atëherë $\sum a_n^2$ konvergjon; c) nëse $a_n \geq 0$ dhe $\sum a_n$ konvergjon, atëherë $\sum a_n^2$ konvergjon.
9. Le të jetë $S = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n}$. Sa kufiza duhen të paktën që gabimi absolut $|r_n|$ të jetë më i vogël se 10^{-3}?

Përgjigje dhe udhëzime të shkurtra.

1. a) $\frac{3}{4}$; b) $\frac{5}{6}$; c) $\frac{8}{3}$.
2. $\frac{68}{55}$.
3. a) $\frac{11}{18}$; b) 1; c) $\frac{1}{3}$.
4. $\frac{\pi}{4}$.
5. d) $\ln\left(1 + \frac{2}{n}\right) \geq \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$, prandaj $S_n \geq \ln(n+1) \to +\infty$.
6. a) Si në Shembullin 5.3, me $|\cos(kx)| \leq 1$. b) $S_{2n} - S_n \geq \frac{n}{\ln(2n+1)} \geq \frac{1}{\ln 3}$.
7. Seria divergjon ($S_n = 2^n - 1 \to +\infty$), pra numri S nuk ekziston dhe veprimet algjebrike me të nuk lejohen.
8. a) E gabuar ($a_n = 1$, $b_n = -1$). b) E gabuar: $a_{2k-1} = \frac{1}{\sqrt{k}}$, $a_{2k} = -\frac{1}{\sqrt{k}}$; atëherë $S_{2k} = 0$ dhe $S_{2k-1} = \frac{1}{\sqrt{k}} \to 0$, pra $\sum a_n = 0$, ndërsa shumat e pjesshme të $\sum a_n^2$ janë $\sum_{n\leq 2k} a_n^2 = 2\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j} \to +\infty$. c) E vërtetë: meqë $a_n \to 0$, kemi $0 \leq a_n^2 \leq a_n$ për n të mëdhenj, prandaj shumat e pjesshme të $\sum a_n^2$ janë jozvogëluese dhe të kufizuara.
9. $|r_n| = \frac{1}{2^n} < 10^{-3} \iff 2^n > 1000 \iff n \geq 10$.

Leksioni i ardhshëm: seritë me kufiza pozitive dhe kriteret e krahasimit (Tema II).